10.6 Superficies en el espacio

CONTENIDO

Superficies cilíndricas

Las primeras cinco secciones de este capítulo estudiaban los preliminares vectoriales necesarios para afrontar el cálculo vectorial y el cálculo en el espacio. En esta sección y en la siguiente estudiaremos superficies y sistemas de coordenadas alternativos en el espacio. Ya conocemos dos tipos especiales de superficies.

1. Esferas: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ Sección 10.2
2. Planos: $ax + by + cz + d = 0$ Sección 10.5

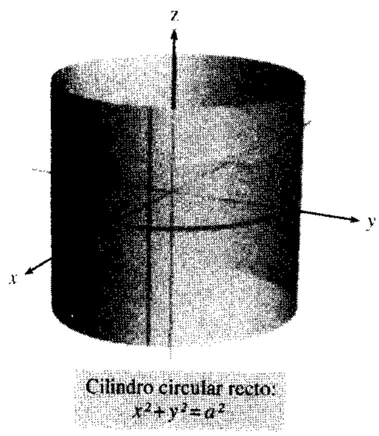


FIGURA 10.56
Las rectas generatrices son paralelas al eje z.

Un tercer tipo lo constituyen las **superficies cilíndricas** (o simplemente **cilindros**. Para definir lo que se entiende por un cilindro en general, consideremos el cilindro recto circular usual de la Figura 10.56. Podemos imaginar este cilindro generado por una recta vertical que se mueve alrededor del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ del plano xy. Este círculo se llama la **curva directriz** (o **curva generatriz**) del cilindro, como se especifica en la próxima definición.

DEFINICIÓN DE LOS CILINDROS

Sea C una curva en un plano y L una recta no paralela a ese plano. El conjunto de todas las rectas paralelas a L que cortan a C se llama un cilindro de curva directriz C. Cada una de esas rectas paralelas se llama una recta generatriz del cilindro.

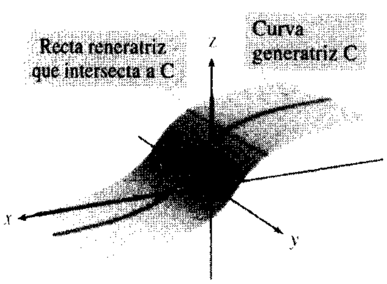


FIGURA 10.57
Cilindro: Las rectas generatrices cortan a C y son paralelas a una recta dada.

Nota. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que C está en uno de los planos de coordenadas. Más aún, en este libro restringiremos nuestra atención a los cilindros *rectos*, es decir, cilindros cuyas rectas generatrices son perpendiculares al plano de coordenadas que contiene a C, como ilustra la Figura 10.57.

Para el cilindro circular recto de la Figura 10.56, la ecuación de la curva directriz es

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \text{Ecuación de la curva directriz en el plano } xy$$

Para hallar una ecuación del cilindro observamos que cualquiera de las rectas generatrices se puede seleccionar fijando valores de x e y, y haciendo variar z por toda la recta real. En este sentido, el valor de z es arbitrario y, en consecuencia, no aparece en la ecuación. En otras palabras, la ecuación de ese cilindro coincide con la de su curva directriz.

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \text{Ecuación de un cilindro en el espacio}$$

ECUACIÓN DE UN CILINDRO

La ecuación de un cilindro cuyas rectas generatrices son paralelas a uno de los ejes de coordenadas contiene solamente las variables correspondientes a los otros dos ejes.

EJEMPLO 1 Gráficas de cilindros

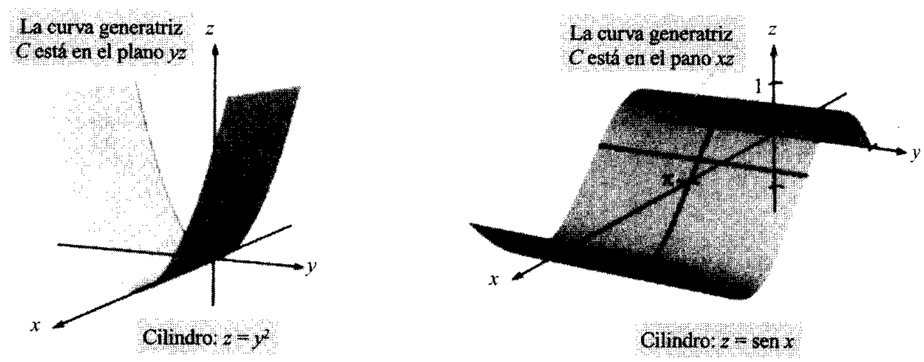
Dibujar un esbozo de la superficie dada por cada una de las ecuaciones siguientes.

a) $z = y^2$ *b*) $z = \text{sen } x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

Solución:

a) Es la gráfica de un cilindro cuya curva directriz, $z = y^2$, es una parábola en el plano yz. Sus rectas generatrices son paralelas al eje x (Figura 10.58*a*).

b) Es la gráfica de un cilindro cuya curva directriz es la curva seno en el plano xz. Sus generatrices son paralelas al eje y (Figura 10.58*b*).



a) Las generatrices son paralelas al eje x *b*) Las generatrices son paralelas al eje y

FIGURA 10.58

Superficies cuádricas

ADVERTENCIA En la tabla de las páginas 1025 y 1026 se muestra sólo una de las posibles orientaciones de cada cuádrica. Si la superficie estuviera orientada a lo largo de un eje distinto, su ecuación cambiaría en concordancia, como ilustran los Ejemplos 2 y 3. El hecho de que los dos tipos de paraboloides tengan una variable elevada a potencia unidad ayuda a clasificar cuádricas. Los otros cuatro tipos tienen ecuaciones que son de *segundo grado* en las tres variables.

El cuarto tipo básico de superficies en el espacio lo constituyen las superficies cuádricas, análogo tridimensional de las secciones cónicas.

SUPERFICIES CUÁDRICAS

La ecuación de una **superficie cuádrica** en el espacio es una ecuación de segundo grado de la forma

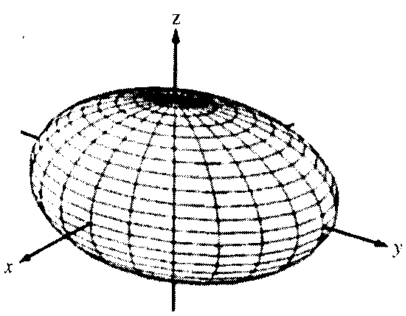
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Hay seis clases de cuádricas: **elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, cono elíptico, paraboloide elíptico** y **paraboloide hiperbólico**.

La intersección de una superficie con un plano se llama la **traza de la superficie** en ese plano. Para visualizar una superficie en el espacio es conveniente determinar de antemano sus trazas con planos elegidos astutamente. Las trazas de las superficies cuádricas son cónicas. Estas trazas, junto con la **forma canónica** de la ecuación de cada cuádrica, se muestran en la tabla de las páginas 1025 y 1026.

Para clasificar una cuádrica, empezaremos escribiendo su ecuación en forma canónica y seguiremos hallando sus trazas en los planos de coordenadas o en otros planos que sean paralelos a los planos coordenados.

TABLA 14.1. Superficies cuádricas

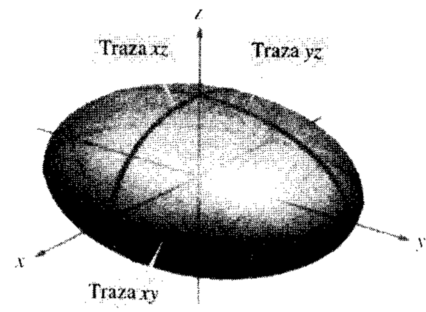


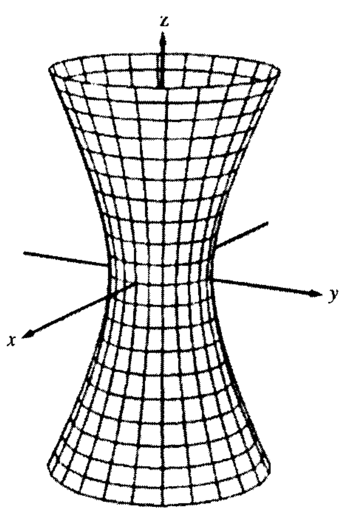
Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Elipse	Paralelo al plano xz
Elipse	Paralelo al plano yz

La superficie es una esfera si $a = b = c \neq 0$.



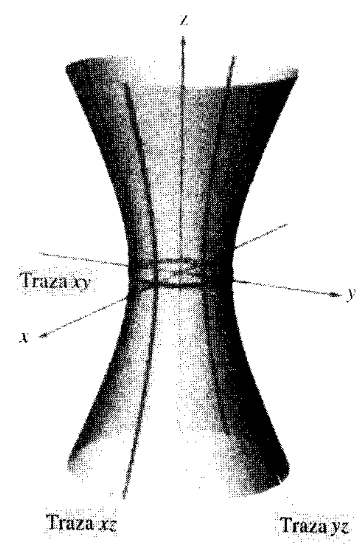


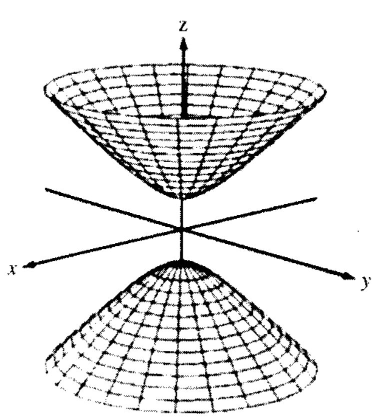
Hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.





Hiperboloide de dos hojas

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo. No hay traza en el plano coordenado perpendicular a este eje.

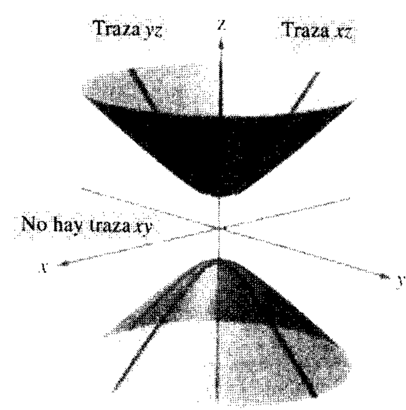
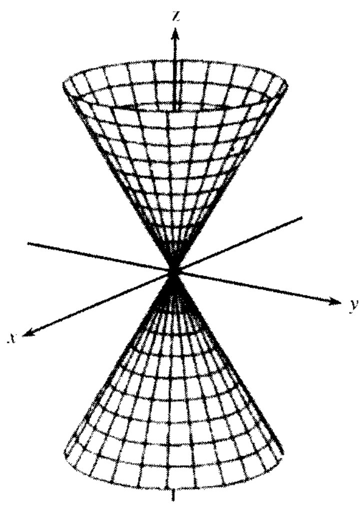


TABLA 14.1. Superficies cuádricas *(Continuación)*

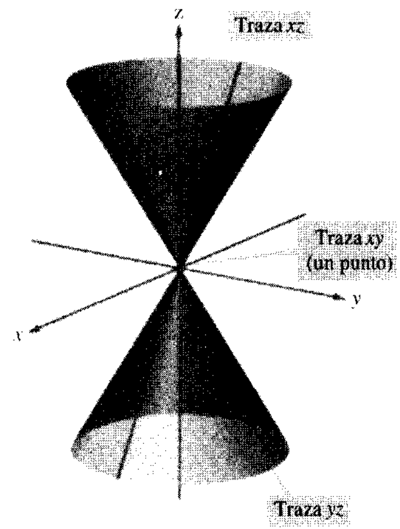


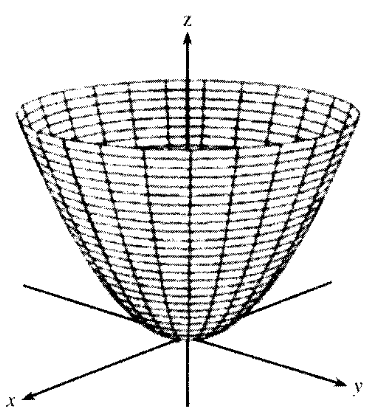
Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a ese eje son rectas que se cortan.



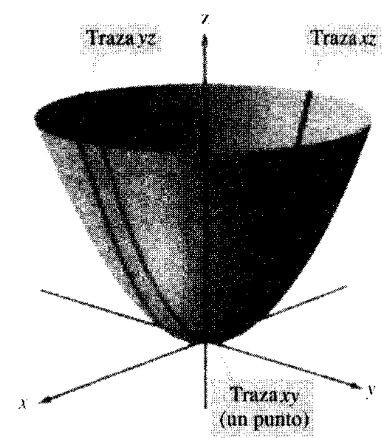


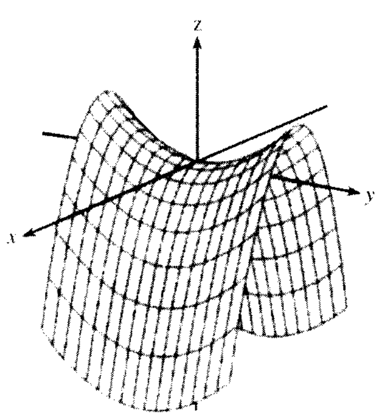
Paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Parábola	Paralelo al plano xz
Parábola	Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la potencia unidad.



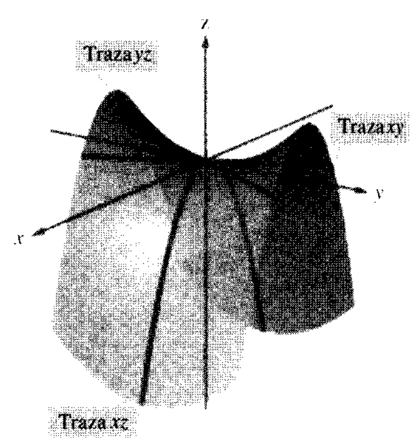


Paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

Traza	*Plano*
Hipérbola	Paralelo al plano xy
Parábola	Paralelo al plano xz
Parábola	Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la potencia unidad.



EJEMPLO 2 Gráfica de una superficie cuádrica

Clasificar y dibujar la superficie dada por $4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0$

Solución: Para empezar, escribimos su ecuación en forma canónica.

$$4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0 \qquad \text{Ecuación original}$$

$$\frac{x^2}{-3} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0 \qquad \text{Dividir por } -12$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{1} = 1 \qquad \text{Forma canónica}$$

De la tabla de las páginas 1025 y 1026 se sigue que la superficie es un hiperboloide de dos hojas con el eje y como su eje. Para dibujarla, conviene hallar sus trazas en los planos coordenados.

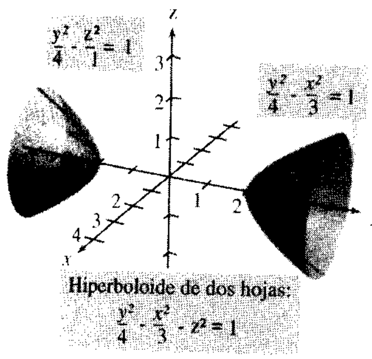


FIGURA 10.59

Traza xy ($z = 0$): $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} = 1$ Hipérbola

Traza xz ($y = 0$): $\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{1} = -1$ No hay traza

Traza yz ($x = 0$): $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$ Hipérbola

La Figura 10.59 muestra su gráfica. □

EJEMPLO 3 Gráfica de una superficie cuádrica

Clasificar y dibujar la superficie de ecuación $x - y^2 - 4z^2 = 0$.

Solución: Como x está elevada a la potencia unidad, la superficie es un paraboloide, que además tiene como eje el eje x. En forma canónica su ecuación es

$$x = y^2 + 4z^2 \qquad \text{Forma canónica}$$

Algunas trazas convenientes son:

Traza xy ($z = 0$): $x = y^2$ Parábola

Traza xz ($y = 0$): $x = 4z^2$ Parábola

Paralela al plano yz ($x = 4$): $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ Elipse

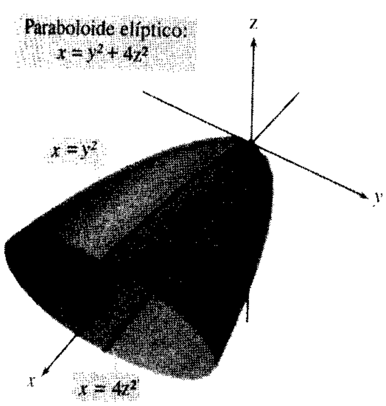


FIGURA 10.60

La superficie es un paraboloide *elíptico* (Figura 10.60). □

Hay ecuaciones de segundo grado en x, y, z que no representan ninguno de los seis tipos básicos de superficies cuádricas. He aquí un par de ejemplos.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \qquad \text{Un único punto}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{Cilindro circular recto}$$

La ecuación canónica de una cuádrica que no está centrada en el origen se puede encontrar completando el cuadrado, como enseña el Ejemplo 4.

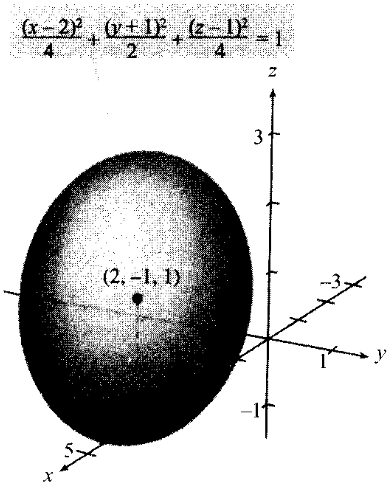


FIGURA 10.61
Un elipsoide centrado en (2, -1, 1).

EJEMPLO 4 Una superficie cuádrica no centrada en el origen

Clasificar y dibujar la superficie dada por

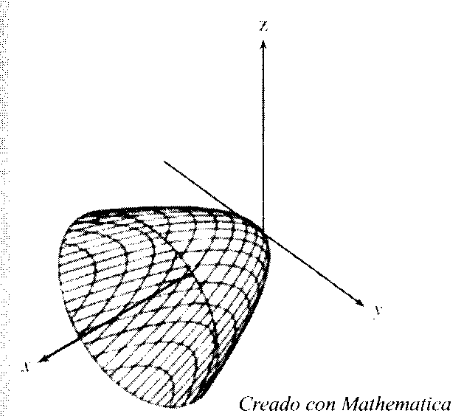
$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 3 = 0$$

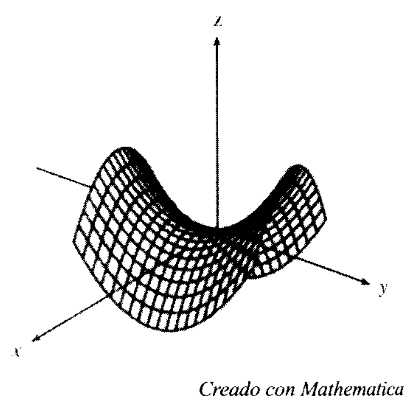
Solución: Completando el cuadrado en cada variable obtenemos

$$(x^2 - 4x + \quad) + 2(y^2 + 2y + \quad) + (z^2 - 2z + \quad) = -3$$
$$(x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) = -3 + 4 + 2 + 1$$
$$(x-2)^2 + 2(y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$$
$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$$

A la vista de esta ecuación, ya podemos concluir que se trata de un elipsoide centrado en el punto (2, −1, 1). Su gráfica puede verse en la Figura 10.61. □

Un programa adecuado permite visualizar en una calculadora las superficies en el espacio*. Muchos de ellos crean la ilusión tridimensional dibujando varias trazas de la superficie y aplicando una rutina de «líneas ocultas» que borra las partes de la superficie situadas detrás de otras. A continuación presentamos dos ejemplos de figuras generadas por *Mathematica*.





Paraboloide elíptico

$x = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$

Paraboloide hiperbólico

$z = \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16}$

Dibujar la gráfica de una superficie con uno de esos programas requiere cierta práctica, especialmente porque hay que saber lo bastante de la superficie en cuestión para elegir la porción y la perspectiva apropiadas. A menudo, se puede mejorar la presentación mediante un giro de ejes. Por ejemplo, el paraboloide elíptico de la figura se está viendo desde un punto «más alto» que el utilizado para ver el paraboloide hiperbólico.

* Algunos programas informáticos de representación tridimensional exigen introducir la superficie mediante ecuaciones paramétricas (Sección 14.5).

Superficies de revolución

El quinto tipo especial de superficies que vamos a estudiar es el de las denominadas **superficies de revolución**. En la Sección 6.4 expusimos un método para calcular el *área* de tales superficies. Ahora nos ocupamos de cómo hallar su *ecuación*. Consideremos la gráfica de la función radio

$$y = r(z) \qquad \text{Curva generatriz}$$

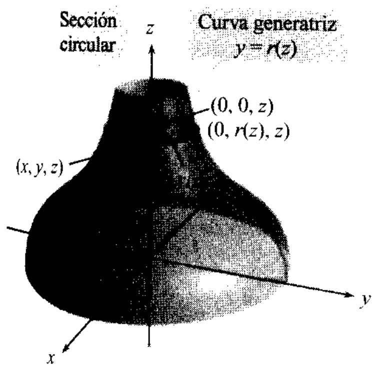


FIGURA 10.62
Una superficie de revolución.

en el plano yz. Si esta gráfica gira en torno al eje z, genera una superficie de revolución (Figura 10.62). Su traza en el plano $z = z_0$ es un círculo de radio $r(z_0)$ y su ecuación es

$$x^2 + y^2 = [r(z_0)]^2 \qquad \text{Traza circular en el plano } z = z_0$$

Cambiando z_0 por z obtenemos una ecuación que es válida para todo valor de z. Del mismo modo se obtienen ecuaciones para superficies de revolución en torno a los otros dos ejes. Resumimos este proceso en el siguiente cuadro.

SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Si la gráfica de una función radio r gira en torno a uno de los ejes de coordenadas, la ecuación de la superficie de revolución resultante tiene una de las formas siguientes.

1. En torno al eje x: $y^2 + z^2 = [r(x)]^2$
2. En torno al eje y: $x^2 + z^2 = [r(y)]^2$
3. En torno al eje z: $x^2 + y^2 = [r(z)]^2$

EJEMPLO 5 Ecuación de una superficie de revolución

a) Una ecuación para la superficie de revolución generada al girar la gráfica de

$$y = \frac{1}{z} \qquad \text{Función radio}$$

en torno al eje z es

$$x^2 + y^2 = [r(z)]^2 \qquad \text{Giro en torno al eje } z$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{z}\right)^2 \qquad \text{Sustituir } r(z) \text{ por } \frac{1}{z}$$

b) Para hallar una ecuación de la superficie engendrada al hacer girar la gráfica de $9x^2 = y^3$ en torno al eje y, despejamos x en términos de y:

$$x = \frac{1}{3}y^{3/2} = r(y) \qquad \text{Función radio}$$

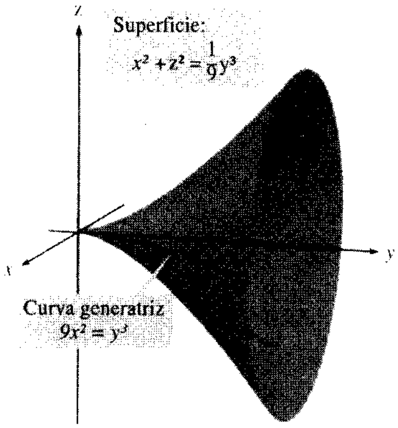


FIGURA 10.63

Así pues, la ecuación de esa superficie es

$$x^2 + z^2 = [r(y)]^2 \qquad \text{Giro en torno al eje } y$$

$$x^2 + z^2 = \left(\frac{1}{3}y^{3/2}\right)^2 \qquad \text{Sustituir } r(y) \text{ por } \frac{1}{3}y^{3/2}$$

$$x^2 + z^2 = \frac{1}{9}y^3 \qquad \text{Ecuación de la superficie}$$

Su gráfica se muestra en la Figura 10.63. □

La curva generatriz de una superficie de revolución no es única. Así, la superficie

$$x^2 + z^2 = e^{-2y}$$

se puede generar haciendo girar la gráfica de $x = e^{-y}$ en torno del eje y, o bien la gráfica de $z = e^{-y}$ en torno del eje y, como ilustra la Figura 10.64.

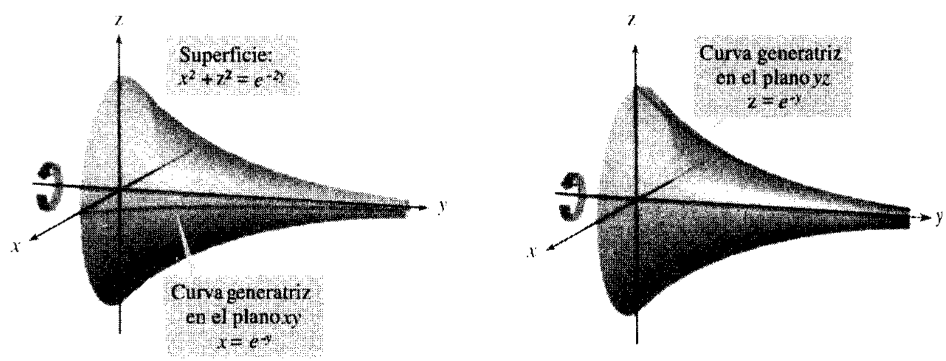


FIGURA 10.64

EJEMPLO 6 Curva generatriz de una superficie de revolución

Hallar una curva generatriz y el eje de revolución de la superficie

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$$

Solución: Sabemos que la ecuación ha de adoptar una de estas formas:

$$x^2 + y^2 = [r(z)]^2 \qquad \text{En torno al eje } z$$

$$y^2 + z^2 = [r(x)]^2 \qquad \text{En torno al eje } x$$

$$x^2 + z^2 = [r(y)]^2 \qquad \text{En torno al eje } y$$

Como los coeficientes de x^2 y z^2 son iguales, hemos de escoger la tercera opción, de manera que

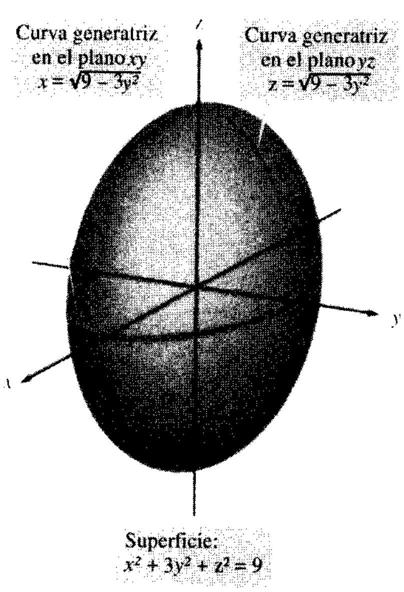


FIGURA 10.65

$$x^2 + z^2 = 9 - 3y^2$$

El eje y es el eje de revolución. Podemos elegir como curva generatriz cualquiera de estas dos trazas

$$x^2 = 9 - 3y^2 \qquad \text{Traza en el plano } xy$$
$$z^2 = 9 - 3y^2 \qquad \text{Traza en el plano } yz$$

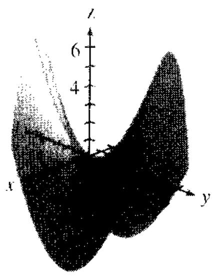
Por ejemplo, usando la primera traza, la curva generatriz es la semielipse

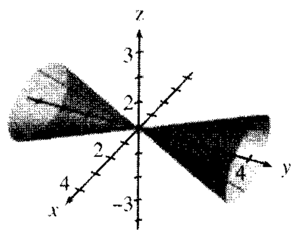
$$x = \sqrt{9 - 3y^2} \qquad \text{Curva generatriz}$$

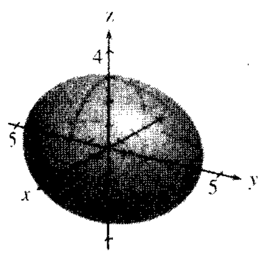
La Figura 10.65 muestra la gráfica de esta superficie. □

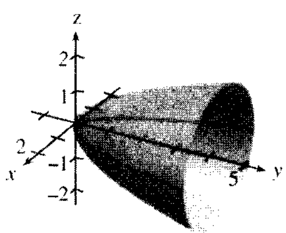
Ejercicios de la Sección 10.6

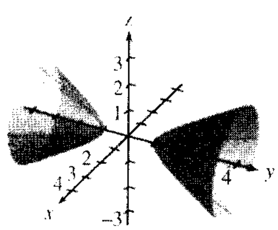
En los Ejercicios 1-6, asociar cada ecuación con su gráfica.

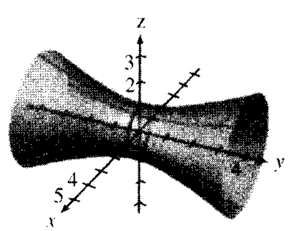












1. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1$

2. $15x^2 - 4y^2 + 15z^2 = -4$

3. $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$

4. $y^2 = 4x^2 + 9z^2$

5. $4x^2 - 4y + z^2 = 0$

6. $4x^2 - y^2 + 4z = 0$

En los Ejercicios 7-16, describir y dibujar la superficie.

7. $z = 3$

8. $x = 4$

9. $y^2 + z^2 = 9$

10. $x^2 + z^2 = 16$

11. $x^2 - y = 0$

12. $y^2 + z = 4$

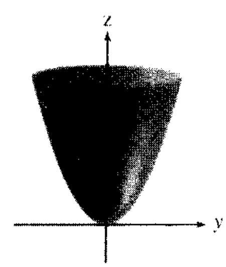
13. $4x^2 + y^2 = 4$

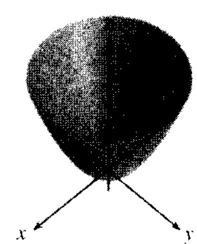
14. $y^2 - z^2 = 4$

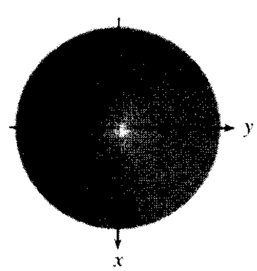
15. $z - \operatorname{sen} y = 0$

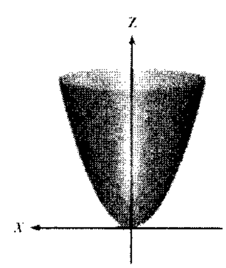
16. $z - e^y = 0$

17. ***Para pensar*** Las cuatro figuras son gráficas de la superficie cuádrica $z = x^2 + y^2$. Asociar cada una de ellas con el punto del espacio desde el que se está contemplando el paraboloide. Los cuatro puntos, desordenados, son $(0, 0, 20)$, $(0, 20, 0)$, $(20, 0, 0)$ y $(10, 10, 20)$.









18. Usar una calculadora apropiada para dibujar la gráfica del cilindro $y^2 + z^2 = 4$ desde cada uno de los puntos siguientes:
a) $(10, 0, 0)$ *b*) $(0, 10, 0)$ *c*) $(10, 10, 10)$

En los Ejercicios 19-30, identificar y dibujar la superficie cuádrica. Confirmar el dibujo en una calculadora.

19. $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$

20. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{16} = 1$

21. $16x^2 - y^2 + 16z^2 = 4$

22. $z^2 - x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

23. $x^2 - y + z^2 = 0$

24. $z = 4x^2 + y^2$

25. $x^2 - y^2 + z = 0$

26. $3z = -y^2 + x^2$

27. $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$

28. $x^2 = 2y^2 + 2z^2$

29. $16x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 32x - 36y + 36 = 0$

30. $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 16x - 6y - 16z + 9 = 0$

En los Ejercicios 31-40, representar la superficie en una calculadora. (*Ayuda:* Puede ser necesario despejar z y considerar dos ecuaciones para representar la superficie.)

31. $z = 2 \operatorname{sen} x$

32. $z = x^2 + 0{,}5y^2$

33. $z^2 = x^2 + 4y^2$

34. $4y = x^2 + z^2$

35. $x^2 + y^2 = \left(\frac{2}{z}\right)^2$

36. $x^2 + y^2 = e^{-z}$

37. $z = 4 - \sqrt{|xy|}$

38. $z = \frac{-x}{8 + x^2 + y^2}$

39. $4x^2 - y^2 + 4z^2 = -16$

40. $9x^2 + 4y^2 - 8z^2 = 72$

En los Ejercicios 41-44, dibujar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

41. $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2$

42. $z = \sqrt{4 - x^2}$, $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

43. $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 2$, $z = 0$

44. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $y = 2z$, $z = 0$

En los Ejercicios 45-50, hallar una ecuación para la superficie de revolución generada por la curva dada en el plano de coordenadas que se especifica, al girar en torno del eje indicado.

	Ecuación de la curva	*Plano coordenado*	*Eje de revolución*
45.	$z^2 = 4y$	plano yz	eje y
46.	$z = 2y$	plano yz	eje y
47.	$z = 2y$	plano yz	eje z
48.	$2z = \sqrt{4 - x^2}$	plano xz	eje x
49.	$xy = 2$	plano xy	eje x
50.	$z = \ln y$	plano yz	eje z

En los Ejercicios 51 y 52, hallar una ecuación para la curva generatriz de la superficie de revolución cuya ecuación se especifica.

51. $x^2 + y^2 - 2z = 0$

52. $x^2 + z^2 = \operatorname{sen}^2 y$

En los Ejercicios 53 y 54, usar el método de capas para calcular el volumen del sólido bajo la superficie de revolución y sobre el plano xy.

53. La curva $z = 4x - x^2$ en el plano xz gira en torno al eje z.

54. La curva $z = \operatorname{sen} y$ $(0 \leqslant y \leqslant \pi)$ en el plano yz gira en torno al eje z.

En los Ejercicios 55 y 56, analizar la traza de la superficie

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2$$

en los planos indicados.

55. Hallar las longitudes de los ejes mayor y menor, así como las coordenadas de los focos, de las elipses intersecciones de la superficie con los planos
a) $z = 2$ *b*) $z = 8$

56. Calcular las coordenada del foco de la parábola intersección de la superficie con los planos
a) $y = 4$ *b*) $x = 2$.

57. ***Forma de la Tierra*** A causa de las fuerzas de rotación, la Tierra es un elipsoide oblongo en lugar de una esfera. El radio ecuatorial mide 3.963 millas y el radio polar 3.942 millas. Hallar una ecuación de ese elipsoide. (Suponemos que el centro de la Tierra está en el origen y que la traza en el plano $z = 0$ corresponde al ecuador.)

58. ***Un modelo matemático*** La tabla recoge los gastos de la sanidad pública (en millones de dólares) en EE.UU. en indemnizaciones a los trabajadores (x), asistencia médica (y) y medicamentos (z). *(Fuente: U.S. Health Care Financing Administration.)*

Año	1980	1985	1990	1991	1992	1993
x	5,1	8,0	16,1	17,2	19,0	21,1
y	28,0	44,5	80,5	99,1	113,5	122,9
z	37,5	72,2	112,1	123,3	138,3	154,2

Estos datos admiten el modelo

$$0{,}551x^2 - 0{,}014y^2 - 19{,}868x + 1{,}856y + z + 3{,}512 = 0$$