horizontal que recorre, si se lanza con un ángulo de elevación $\theta = 42.5°$.

45. Demostrar que si un objeto se mueve con rapidez constante, sus vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

46. Probar que un objeto que se mueve en línea recta con rapidez constante tiene aceleración nula.

47. ***Investigación*** Un objeto se mueve a lo largo de la elipse determinada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 6 \cos t\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$.

a) Hallar $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$, y $\mathbf{a}(t)$

b) Completar la tabla con ayuda de calculadora.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
Rapidez					

c) Dibujar la trayectoria elíptica, y los vectores velocidad y aceleración en los valores de t dados en la tabla.

d) Con los resultados precedentes, describir la relación geométrica entre los vectores velocidad y aceleración cuando la rapidez de la partícula está creciendo y cuando está decreciendo.

48. ***Redacción*** Consideremos una partícula que se mueve sobre la trayectoria

$$\mathbf{r}_1(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Discutir cualquier modificación en la posición, la velocidad o la aceleración de la partícula si su posición viene dada por la función vectorial $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(2t)$. Generalizar los resultados para la función posición $\mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}_1(\omega t)$.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Deseamos lanzar un objeto a un amigo que está montado en una noria (véase figura). Las ecuaciones paramétricas que siguen dan las trayectorias del amigo $\mathbf{r}_1(t)$ y del objeto $\mathbf{r}_2(t)$. La distancia se mide en metros y el tiempo en segundos.

$$\mathbf{r}_1(t) = 15\left(\operatorname{sen}\frac{\pi t}{10}\right)\mathbf{i} + \left(16 - 15\cos\frac{\pi t}{10}\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_1(t) = [22 - 8{,}03(t - t_0)]\mathbf{i} + [1 + 11{,}47(t - t_0) - 4{,}9(t - t_0)^2]\mathbf{j}$$

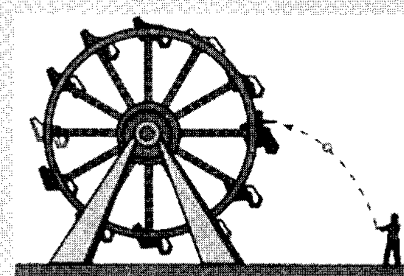
a) Localizar la posición del amigo cuando $t = 0$.

b) Determinar el número de revoluciones por minuto de la noria.

c) ¿Con qué velocidad inicial y ángulo de elevación ha sido lanzado el objeto en el instante t_0?

d) Representar en una calculadora las funciones vectoriales usando un valor de t_0 que permita al amigo alcanzar el objeto (hacerlo por «prueba y error»). Explicar el significado de t_0.

e) Estimar el instante aproximado en que el amigo podrá atrapar el objeto y la velocidad del amigo en ese momento.



11.4 Vectores tangentes y vectores normales

CONTENIDO ▪

Vectores tangentes y vectores normales

En la sección anterior hemos visto que el vector velocidad apunta en la dirección del movimiento. Esta observación conduce a la siguiente definición, aplicable a cualquier curva suave, no sólo a aquellas en las que el parámetro es el tiempo.

DEFINICIÓN DEL VECTOR TANGENTE UNITARIO

Sea C una curva suave representada por r en un intervalo abierto I. El vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ en t se define como

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \ \mathbf{r}'(t) \neq 0$$

Nota. Recordemos que una curva se dice que es suave en un intervalo si $\mathbf{r}'$ es continua y no nula en dicho intervalo. Así pues, la «suavidad» es suficiente para garantizar que una curva posee vector tangente unitario en todos sus puntos.

EJEMPLO 1 Cálculo del vector tangente unitario

Hallar el vector tangente unitario a la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

cuando $t = 1$.

Solución: La derivada de $\mathbf{r}(t)$ es

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \qquad \text{Derivada de } \mathbf{r}(t)$$

Por tanto, el vector tangente unitario es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \qquad \text{Definición de } \mathbf{T}(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}) \qquad \text{Sustituir } \mathbf{r}'(t)$$

Cuando $t = 1$, el vector tangente unitario es (véase Figura 11.19)

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$ □

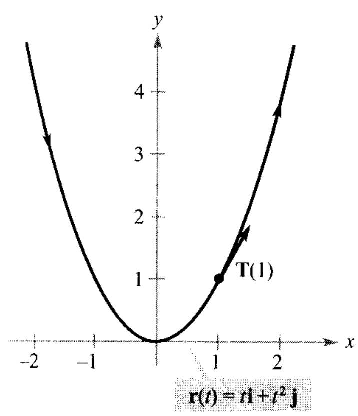


FIGURA 11.19
La dirección del vector tangente unitario depende de la orientación de la curva.

Nota. En el Ejemplo 1, la dirección del vector tangente unitario depende de la orientación de la curva. Si la parábola de la Figura 11.19 estuviera dada por

$$\mathbf{r}(t) = -(t - 2)\mathbf{i} + (t - 2)^2\mathbf{j}$$

$\mathbf{T}(1)$ sería todavía el vector tangente unitario en el punto (1, 1), pero apuntaría en la dirección opuesta (intente verificar este hecho).

La **recta tangente a una curva** en un punto es la recta que pasa por ese punto y es paralela al vector tangente unitario. En el Ejemplo 2, se usa el vector tangente unitario para determinar la recta tangente a una hélice en uno de sus puntos.

EJEMPLO 2 Recta tangente a una curva en un punto

Hallar $\mathbf{T}(t)$ y unas ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

en el punto correspondiente a $t = \pi/4$.

Solución: La derivada de $\mathbf{r}(t)$ es $\mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, lo cual implica que $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4\,\text{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 1} = \sqrt{5}$. Por tanto, el vector tangente unitario es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Cuando $t = \pi/4$, el vector tangente unitario es

$$\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Usando los números directores $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, y $c = 1$, y el punto $(x_1, y_1, z_1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi/4)$ es fácil obtener las siguientes ecuaciones paramétricas (con parámetro s):

$$x = x_1 + as = \sqrt{2} - \sqrt{2}s$$
$$y = y_1 + bs = \sqrt{2} + \sqrt{2}s$$
$$z = z_1 + cs = \frac{\pi}{4} + s$$

Esta recta tangente se muestra en la Figura 11.20. □

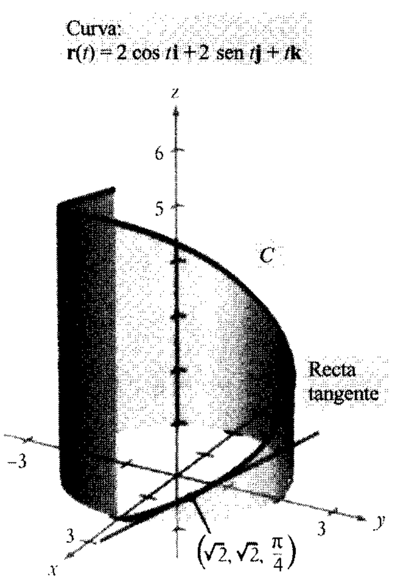


FIGURA 11.20
La recta tangente a una curva en un punto queda determinada por el vector tangente unitario en ese punto.

En el Ejemplo 2 hay infinitos vectores ortogonales al vector tangente $\mathbf{T}(t)$. Uno de ellos es $T'(t)$, como se desprende de la propiedad 7 del Teorema 11.2. Es decir,

$$\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = \|\mathbf{T}(t)\|^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$$

Normalizando el vector $T'(t)$ se obtiene un vector especial, llamado el **vector normal principal** (**unitario**), como recoge la próxima definición.

DEFINICIÓN DEL VECTOR NORMAL PRINCIPAL (UNITARIO)

Sea C una curva suave representada por r en un intervalo abierto I. Si $\mathbf{T}'(t) \neq 0$, el vector normal principal en t se define como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

EJEMPLO 3 Cálculo del vector normal principal

Hallar $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{N}(1)$ para la curva representada por

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$$

Solución: Derivando vemos que

$$\mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{9 + 16t^2}$$

de donde se deduce que el vector tangente unitario es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}) \qquad \text{Vector tangente unitario}$$

Usando el Teorema 11.2, derivamos $\mathbf{T}(t)$ respecto de t para obtener

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(4\mathbf{j}) - \frac{16t}{(9 + 16t^2)^{3/2}}(3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}) = \frac{12}{(9 + 16t^2)^{3/2}}(-4t\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = 12\sqrt{\frac{9 + 16t^2}{(9 + 16t^2)^3}} = \frac{12}{9 + 16t^2}$$

Por tanto, el vector normal principal es

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(-4t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \qquad \text{Vector normal principal}$$

Cuando $t = 1$, el vector normal principal es

$$\mathbf{N}(1) = \frac{1}{5}(-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

como muestra la Figura 11.21. □

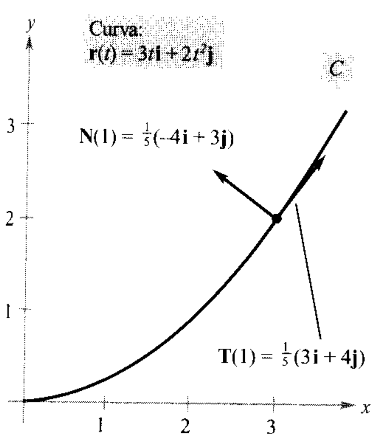


FIGURA 11.21
El vector normal principal apunta hacia la concavidad de la curva.

El vector normal principal suele ser difícil de calcular algebraicamente. Para curvas planas puede simplificarse el álgebra hallando

$$\mathbf{T}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad \text{Vector tangente unitario}$$

y observando que $\mathbf{N}(t)$ debe ser

$$\boxed{\mathbf{N}_1(t) = y(t)\mathbf{i} - x(t)\mathbf{j}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\mathbf{N}_2(t) = -y(t)\mathbf{i} + x(t)\mathbf{j}}$$

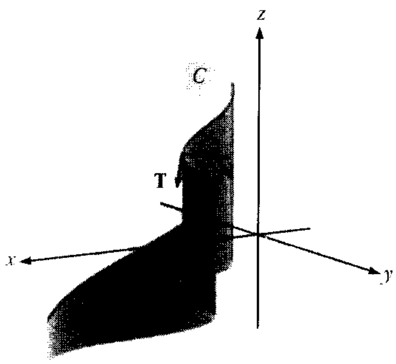


FIGURA 11.22
En cualquier punto de una curva, un vector normal unitario es ortogonal al vector tangente unitario. El vector normal principal apunta en la dirección en la que está girando la curva.

Como $\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} = 1$, se sigue que ambos, $\mathbf{N}_1(t)$ y $\mathbf{N}_2(t)$, son vectores normales unitarios. El vector normal principal **N** es el que apunta hacia la concavidad de la curva, como se indica en la Figura 11.21 (véase Ejercicio 49). Esto vale asimismo para curvas en el espacio. Es decir, para un objeto que se mueve a lo largo de una curva C en el espacio, el vector $\mathbf{T}(t)$ apunta en la dirección del movimiento, mientras que $\mathbf{N}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{T}(t)$ y apunta en la dirección en la que el objeto está girando (Figura 11.22).

EJEMPLO 4 Cálculo del vector normal principal

Hallar el vector normal principal para la hélice

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

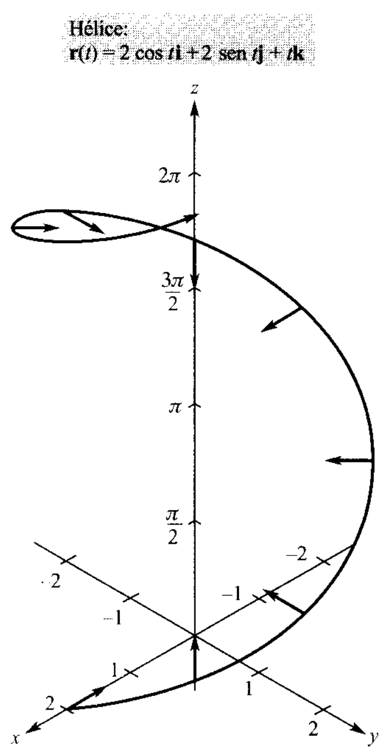


FIGURA 11.23
$\mathbf{N}(t)$ es horizontal y apunta hacia el eje z.

Solución: Por el Ejemplo 2 sabemos que el vector tangente unitario es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\,\text{sen}\, t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Así pues, $T'(t)$ viene dado por

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\cos t\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j})$$

Como $\|\mathbf{T}'(t)\| = 2/\sqrt{5}$, se sigue que el vector normal principal es

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(t) &= \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \\ &= \frac{1}{2}(-2\cos t\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j}) \\ &= -\cos t\mathbf{i} - \text{sen}\, t\mathbf{j}\end{aligned}$$

Nótese que este vector es horizontal y apunta hacia el eje z (Figura 11.23). □

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Volvamos al problema de describir el movimiento de un objeto sobre una curva. En la sección anterior vimos que un objeto que se mueve con **rapidez constante**, los vectores velocidad y aceleración son ortogonales. Eso parece lógico, ya que si hubiese alguna aceleración en la dirección del movimiento, la rapidez no se mantendría constante. Una manera de comprobar esta afirmación consiste en darse cuenta de que

$$\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

si $\|\mathbf{r}'(t)\|$ es constante. (Véase propiedad 7 del Teorema 11.2.)

Sin embargo, para un objeto que viaja con **rapidez variable**, los vectores velocidad y aceleración no son necesariamente ortogonales. Por ejemplo, hemos visto que el vector aceleración de un proyectil apunta siempre hacia abajo, sea cual sea la dirección del movimiento.

En general, una parte de la aceleración (la componente tangencial) actúa en la dirección del movimiento y otra parte (la componente normal) actúa en dirección perpendicular a la del movimiento. Con el fin de determinar esas dos componentes, podemos utilizar los vectores unitarios $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$, que van a jugar un papel análogo al que juegan **i, j** cuando se representan vectores en el plano. El próximo teorema establece que el vector aceleración está en el plano determinado por $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

TEOREMA 11.4 VECTOR ACELERACIÓN

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C y $\mathbf{N}(t)$ existe, el vector aceleración $\mathbf{a}(t)$ está en el plano determinado por $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

Demostración: Con el fin de simplificar la notación, escribiremos $\mathbf{T}$ en lugar de $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{T}'$ en lugar de $\mathbf{T}'(t)$, etc. De $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/\|\mathbf{r}'\| = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, se sigue que

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}$$

Derivando resulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} = \mathbf{v}' &= D_t[\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}' && \text{Regla del producto}\\
&= D_t[\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}'\left(\frac{\|\mathbf{T}'\|}{\|\mathbf{T}'\|}\right)\\
&= D_t[\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{T}'\|\mathbf{N} && \mathbf{N} = \mathbf{T}'/\|\mathbf{T}'\|
\end{aligned}$$

Como **a** está expresado mediante una combinación lineal de **T** y **N**, debe estar en el plano determinado por **T** y **N**. □

Los coeficientes de **T** y **N** en la demostración del Teorema 11.4 se llaman **componente tangencial** y **componente normal de la aceleración**, y se suelen denotar por $a_{\mathbf{T}} = D_t[\|\mathbf{v}\|]$ y $a_{\mathbf{N}} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{T}'\|$. Así pues, podemos escribir

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T}(t) + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}(t)}$$

El teorema siguiente proporciona fórmulas apropiadas para $a_{\mathbf{N}}$ y $a_{\mathbf{T}}$.

TEOREMA 11.5 COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACIÓN

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C, para la que existe $\mathbf{N}(t)$, las componentes tangencial y normal de la aceleración vienen dadas por

$$a_{\mathbf{T}} = D_t[\|\mathbf{v}\|] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$a_{\mathbf{N}} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{T}'\| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2}$$

Nótese que $a_{\mathbf{N}} \geqslant 0$. La componente normal de la aceleración se llama también componente centrípeta de la aceleración.

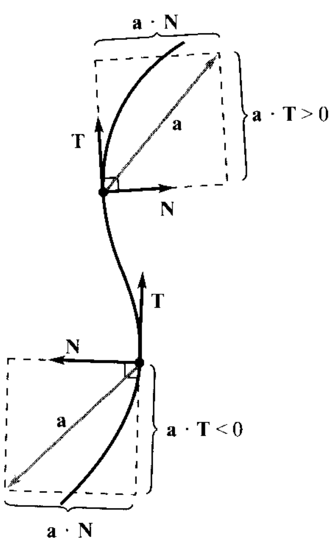


FIGURA 11.24
Las componentes tangencial y normal de la aceleración se obtienen proyectando **a** sobre **T** y **N**.

Demostración: Es claro que a está en el plano de **T** y **N**, así que de la Figura 11.24 deducimos que, en cualquier instante t, la componente de la proyección del vector aceleración sobre **T** es $a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}$ y sobre **N** es $a_{\mathbf{N}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}$. Además, como $\mathbf{a} = \mathbf{v}'$ y $\mathbf{T} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, resulta ser

$$A_{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}$$

En los Ejercicios 51 y 52 se pide probar las otras partes del teorema. □

Nota. Las fórmulas del Teorema 11.5, junto con otras de este capítulo, se resumen en la página 1095.

EJEMPLO 5 Componentes tangencial y normal de la aceleración

Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración para la función posición $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$.

Solución: Comenzamos calculando la velocidad, la rapidez y la aceleración.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$
$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{9 + 1 + 4t^2} = \sqrt{10 + 4t^2}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{k}$$

Por el Teorema 11.5, la componente tangencial de la aceleración es

$$a_{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4t}{\sqrt{10 + 4t^2}}$$

y puesto que

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$$

y la componente normal es

$$a_{\mathrm{N}} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\sqrt{4 + 36}}{\sqrt{10 + 4t^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10 + 4t^2}} \qquad \square$$

| Nota. En este ejemplo podríamos haber utilizado una fórmula alternativa para

$$a_{\mathrm{N}} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathrm{T}}^2} = \sqrt{(2)^2 - \frac{16t^2}{10 + 4t^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10 + 4t^2}}$$

EJEMPLO 6 Cálculo de a_{N} **y** a_{T} **para una hélice**

| Nota. La componente normal de la aceleración es igual al radio del cilindro en el que está contenida la hélice.

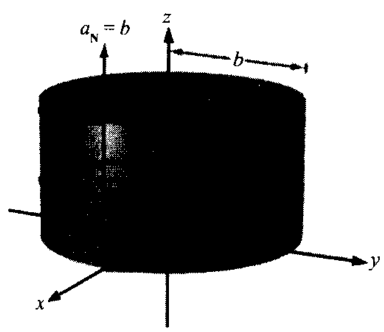


FIGURA 11.25
En esta parametrización, la componente normal de la aceleración es igual a la aceleración.

Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración para la hélice dada por $\mathbf{r}(t) = b \cos t\mathbf{i} + b \operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$, $b > 0$

Solución:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -b \operatorname{sen} t\mathbf{i} + b \cos t\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -b \cos t\mathbf{i} - b \operatorname{sen} t\mathbf{j}$$

Por el Teorema 11.5, la componente tangencial de la aceleración es

$$a_{\mathrm{T}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{b^2 \operatorname{sen} t \cos t - b^2 \operatorname{sen} t \cos t + 0}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0$$

Además, como $\|\mathbf{a}(t)\| = \sqrt{b^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = b$, podemos usar la fórmula alternativa para la componente normal:

$$a_{\mathrm{N}}\sqrt{\|\mathbf{a}(t)\|^2 - a_{\mathrm{T}}^2} = \sqrt{b^2 - 0^2} = b$$

Hagamos notar que la componente normal es igual en magnitud a la aceleración. En otras palabras, puesto que la rapidez es constante, la aceleración es perpendicular a la velocidad (véase Figura 11.25). $\square$

EJEMPLO 7 Movimiento de un proyectil

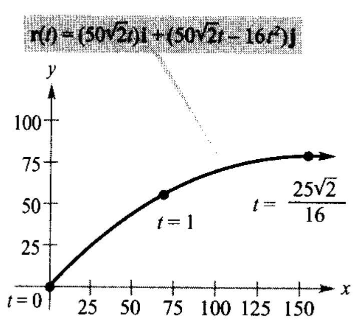


FIGURA 11.26
Trayectoria de un proyectil.

La función posición del proyectil de la Figura 11.26 viene dada por

$$\mathbf{r}(t) = (50\sqrt{2}t)\mathbf{i} + (50\sqrt{2}t - 16t^2)\mathbf{j} \qquad \text{Vector posición}$$

Calcular la componente tangencial de la aceleración cuando $t = 0$, 1 y $25\sqrt{2}/16$.

$$\mathbf{v}(t) = 50\sqrt{2}\mathbf{i} + (50\sqrt{2} - 32t)\mathbf{j} \qquad \text{Vector velocidad}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = 2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2}t + 16^2t^2} \qquad \text{Rapidez}$$

$$\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j} \qquad \text{Vector aceleración}$$

La componente tangencial de la aceleración es

$$a_{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{-32(50\sqrt{2} - 32t)}{2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2}t + 16^2t^2}}$$

En los instantes especificados, es

$$a_{\mathbf{T}}(0) = \frac{-32(50\sqrt{2})}{100} = -16\sqrt{2} \approx -22{,}6$$

$$a_{\mathbf{T}}(1) = \frac{-32(50\sqrt{2} - 32)}{2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2} + 16^2}} \approx -15{,}4$$

$$a_{\mathbf{T}}\left(\frac{25\sqrt{2}}{16}\right) = \frac{-32(50\sqrt{2} - 50\sqrt{2})}{50\sqrt{2}} = 0$$

Puede verse en la Figura 11.26 que en el momento de alcanzar la altura máxima, cuando $t = 25\sqrt{2}/16$, la componente tangencial es cero. Esto es razonable, ya que la dirección del movimiento es horizontal en ese punto y la componente tangencial de la aceleración es la componente horizontal. □

Ejercicios de la Sección 11.4

En los Ejercicios 1-6, hallar el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ y unas ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva espacial en el punto P.

1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $P(0, 0, 0)$

2. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$, $P(1, 1, \frac{2}{3})$

3. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $P(2, 0, 0)$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t, \sqrt{4 - t^2}\rangle$, $P(1, 1, \sqrt{3})$

5. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 4\rangle$ $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$

6. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 4\operatorname{sen}^2 t\rangle$, $P(1, \sqrt{3}, 1)$

En los Ejercicios 7 y 8, representar en una calculadora la curva. A continuación, hallar $\mathbf{T}(t)$ y ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el punto P. Representar la recta tangente.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, 2t^3/3\rangle$, $P(3, 9, 18)$

8. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$, $P(0, 4, \pi/4)$

Aproximación lineal En los Ejercicios 9 y 10, determinar ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la gráfica en $t = t_0$ y usarlas para aproximar $\mathbf{r}(t_0 + 0{,}1)$.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \ln t, \sqrt{t}\rangle$, $t_0 = 1$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, 2\cos t, 2\operatorname{sen} t\rangle$, $t_0 = 0$

En los Ejercicios 11 y 12, verificar que las curvas se cortan en los valores de los parámetros indicados y calcular el ángulo que forman los vectores tangentes a las curvas en el punto de intersección.

11. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t - 2, t^2, \frac{1}{2}t\right\rangle$, $t = 4$

$\mathbf{u}(s) = \left\langle \frac{1}{4}s, 2s, \sqrt[3]{s}\right\rangle$, $s = 8$

12. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos t, \operatorname{sen} t\rangle$, $t = 0$

$\mathbf{u}(s) = \left\langle -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 s - \operatorname{sen} s, 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 s - \operatorname{sen} s, \frac{1}{2}\operatorname{sen} s\cos s + \frac{1}{2}s\right\rangle$, $s = 0$

En los Ejercicios 13-16, hallar $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ para un objeto que se mueve a lo largo de la trayectoria determinada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Con esos resultados, describir la forma de la trayectoria. ¿Es constante la rapidez de ese objeto?

13. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i}$ **14.** $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$

15. $\mathbf{r}(t) = 4t^2\mathbf{i}$ **16.** $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los Ejercicios 17-22, hallar $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $a_{\mathbf{T}}$, y $a_{\mathbf{N}}$ en el instante t indicado para la curva plana $\mathbf{r}(t)$.

17. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j},\ t = 1$

18. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j},\ t = 1$

19. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\mathbf{j},\ t = \dfrac{\pi}{2}$

20. $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t\mathbf{i} + b \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j},\ t = 0$

21. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos \omega t + \omega t \operatorname{sen} \omega t, \operatorname{sen} \omega t - \omega t \cos \omega t \rangle,\ t = t_0$

22. $\mathbf{r}(t) = \langle \omega t - \operatorname{sen} \omega t, 1 - \cos \omega t \rangle,\ t = t_0$

Movimiento circular En los Ejercicios 23-26, consideramos un objeto que se mueve de acuerdo con la función posición

$$\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}$$

23. Hallar $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$.

24. Determinar las direcciones de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ respecto de la función posición $\mathbf{r}$.

25. Calcular la rapidez del objeto en todo instante t y explicar su valor en relación con el valor de $a_{\mathbf{T}}$.

26. Si se divide por dos la velocidad angular, ¿en qué factor cambia $a_{\mathbf{N}}$?

En los Ejercicios 27 y 28, dibujar la curva plana descrita por la función vectorial dada y esbozar los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ en el punto $\mathbf{r}(t_0)$. Obsérvese que $\mathbf{N}$ apunta hacia la concavidad de la curva.

	Función	*Tiempo*
27.	$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}$	$t_0 = 2$
28.	$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$	$t_0 = \dfrac{\pi}{4}$

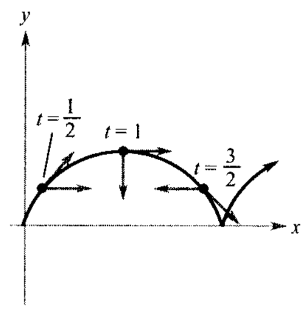
29. ***Movimiento cicloidal*** La figura muestra la trayectoria de una partícula que sigue el modelo de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle \pi t - \operatorname{sen} \pi t, 1 - \cos \pi t \rangle$$

Asimismo, la figura muestra los vectores $\mathbf{v}(t)/\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)/\|\mathbf{a}(t)\|$ en los valores indicados de t.

a) Hallar $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ para $t = \dfrac{1}{2}$, $t = 1$, y $t = \dfrac{3}{2}$

b) Determinar si la rapidez de la partícula crece o decrece en cada uno de esos instantes. Justificar los resultados.



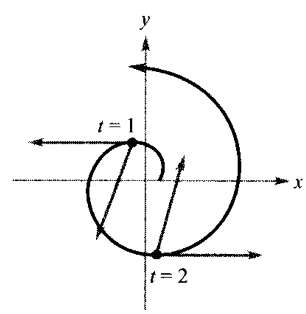
30. ***Movimiento sobre una involuta de un círculo*** La figura muestra la trayectoria de una partícula móvil sobre la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos \pi t + \pi t \operatorname{sen} \pi t, \operatorname{sen} \pi t - \pi t \cos \pi t \rangle$$

Muestra asimismo los vectores $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ para $t = 1$ y $t = 2$.

a) Hallar $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ para $t = 1$ y $t = 2$.

b) Determinar si la rapidez de la partícula crece o decrece en cada uno de esos instantes. Justificar las respuestas.



En los Ejercicios 31-34, calcular $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $a_{\mathbf{T}}$, y $a_{\mathbf{N}}$ en el instante t que se especifica para la curva $\mathbf{r}(t)$.

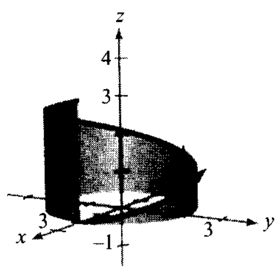
	Función	*Tiempo*
31.	$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$	$t = 1$
32.	$\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	$t = 2$
33.	$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$	$t = 1$
34.	$\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$	$t = 0$

En los Ejercicios 35 y 36, representar la curva espacial en una calculadora y hallar a continuación $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $a_{\mathbf{T}}$, $a_{\mathbf{N}}$ en el instante t que se indica. Dibujar $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ sobre la curva.

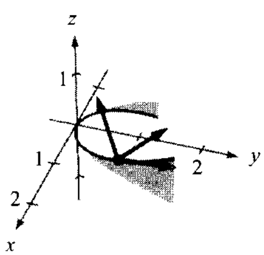
Función	*Tiempo*
35. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} + 3\,\text{sen}\, t\mathbf{k}$	$t = \dfrac{\pi}{2}$
36. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$	$t = 2$

En los Ejercicios 37 y 38, hallar los vectores **T** y **N**, y el vector binormal unitario $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ para la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ en el instante t indicado.

37. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + \dfrac{t}{2}\mathbf{k}$ $\quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}$



38. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{t^3}{3}\mathbf{k}$ $\quad t_0 = 1$



39. ***Control de tráfico aéreo*** A causa de una tormenta, los controladores ordenan a un piloto, que vuela a una altitud de 4 millas, que efectúe un giro de 90° y se eleve hasta 4,2 millas. El modelo de su trayectoria durante la maniobra es

$$\mathbf{r}(t) = \langle 10\cos 10\pi t,\ 10\,\text{sen}\, 10\pi t,\ 4 + 4t\rangle,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{20}$$

donde el tiempo t se mide en horas y la distancia $\mathbf{r}$ en millas.

a) Calcular la rapidez del avión.

b) Con ayuda de calculadora, hallar a_T y a_N. ¿Por qué una de ellas es nula?

40. ***Movimiento de un proyectil*** Se lanza un proyectil desde una altura de 5 pies, con una velocidad inicial de 100 pies/s y con un ángulo de elevación de 30°.

a) Describir su trayectoria mediante una función vectorial.

b) Representar su trayectoria en una calculadora y aproximar la altura máxima y el alcance del proyectil.

c) Calcular $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$, y $\mathbf{a}(t)$

d) Completar la tabla con ayuda de calculadora.

t	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5,	3,0
Rapidez						

e) Usar una calculadora para hallar $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, a_T, y a_N, y verificar que $\mathbf{a} = a_\mathrm{T}\mathbf{T} + a_\mathrm{N}\mathbf{N}$.

f) Dibujar en la calculadora la gráfica de las funciones escalares a_T y a_N. ¿Cómo está cambiando la rapidez del proyectil cuando a_T y a_N tienen signos opuestos?

41. ***Movimiento de un proyectil*** Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración para un proyectil disparado con ángulo de elevación θ y velocidad inicial v_0 ¿Cuál es el valor de esas componentes en el instante en el que alcanza la máxima altura?

42. ***Movimiento de un proyectil*** Un avión que vuela a 30.000 pies de altura y a 540 millas/h (792 pies/s), deja caer una bomba. Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración de la bomba.

43. ***Aceleración centrípeta*** Un objeto está girando a velocidad constante, atado al extremo de una cuerda, siguiendo la función posición dada en los Ejercicios 23-26.

a) Si se dobla la velocidad angular, ¿cómo cambia la aceleración centrípeta?

b) Si se mantiene la velocidad angular pero se divide por dos la longitud de la cuerda, ¿cómo cambia la aceleración centrípeta?

44. ***Fuerza centrípeta*** Un objeto de masa m se mueve con velocidad constante v por un círculo de radio r. La fuerza requerida para producir la componente centrípeta de la aceleración se llama la fuerza centrípeta y viene dada por $F = mv^2/r$. La ley de Newton afirma que $F = GMm/d^2$, donde d denota la distancia entre los centros de los dos cuerpos de masas M y m, y G es la constante de gravitación universal. Usar esa ley para probar que la rapidez exigida para producir el movimiento circular es $v = \sqrt{GM/r}$.

Velocidad orbital En los Ejercicios 45-48, calcular, usando el resultado del Ejercicio 44, la rapidez necesaria para la órbita circular dada en torno a la Tierra. Tomar $GM = 9{,}56 \times 10^4$ millas cúbicas/s^2, y un radio terrestre de 4.000 millas.

45. La órbita de un módulo espacial que viaja a 100 millas de altura sobre la superficie terrestre.

46. La órbita de un módulo espacial que viaja a 200 millas de altura sobre la superficie terrestre.