Matemáticas V

Cuadernillo de Ejercicios

Ing. Joel Gómez Pérez

ECUACIONES DIFERENCIALES

Definición de una ecuación diferencial

Según Zill:

Una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, es una ecuación diferencial.

Según Granville:

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene derivadas o diferenciales.

A menudo las palabras ecuaciones diferenciales nos hacen pensar en la solución de cierto tipo de ecuación que contiene derivadas; pero implica mucho más que eso.

Así como al estudiar álgebra y trigonometría se invierte bastante tiempo en resolver ecuaciones, como $x^2+5x+4=0$ con la incógnita "*x*", en este curso una de nuestras tareas será resolver ecuaciones diferenciales como $y''+2y'+y=0$; cuya incógnita es la función $y=f(x)$.

En el curso se verá que hay más en el estudio de las ecuaciones diferenciales, que solo el manejo de los métodos que alguien ha inventado para resolverlas.

ACTIVIDAD 1: Investigar el origen de las ecuaciones diferenciales.

MODELOS MATEMATICOS

Las ecuaciones diferenciales cobran vida al desear describir el comportamiento de un sistema o fenómeno de la vida real en términos matemáticos; dichos fenómenos pueden ser físicos, sociológicos o hasta económicos.

A la descripción matemática de un sistema o fenómeno se llama modelo matemático; y se forma con ciertos objetivos en mente; por ejemplo, podríamos tratar de comprender los mecanismos de cierto ecosistema estudiando el crecimiento de las poblaciones de animales, o podríamos tratar de fechar fósiles analizando la desintegración de una sustancia radiactiva, sea en el fósil o en el estrato donde se encontraba.

Cuando tratamos de describir un sistema, con frecuencia se plantean hipótesis; dado que las hipótesis acerca de un sistema implican con frecuencia la razón o tasa, de cambio de una o más de las variables, el enunciado matemático de todas esas hipótesis es una o más ecuaciones donde intervienen derivadas.

EJEMPLOS DE MODELOS MATEMATICOS

Dinámica de poblaciones

Uno de los primeros intentos de modelar matemáticamente el crecimiento demográfico humano lo hizo el economista ingles Thomas Malthus en 1798. En esencia, la idea del modelo maltusiano es la hipótesis de que la tasa de crecimiento de la población de un país crece en forma proporcional a la población total, $P(t)$, de ese país en cualquier momento "*t*". En otras palabras, mientras más personas haya en el momento "*t*", mas habrá en el futuro. En términos matemáticos, esta hipótesis se puede expresar

$$\frac{dP}{dt}\alpha P \qquad \text{o sea,} \qquad \frac{dP}{dt}=kP$$

Desintegración radiactiva

El núcleo de un átomo está formado por combinaciones de protones y neutrones. Muchas de esas combinaciones son inestables; esto es, los átomos se desintegran, o se convierten en átomos de otras sustancias. Se dice que estos núcleos son radiactivos; por ejemplo, con el tiempo, el radio Ra 226, intensamente radiactivo, se transforma en gas radón, Rn 222, también radiactivo. Para modelar el fenómeno de la desintegración radiactiva, se supone que la tasa con que los núcleos se desintegran (decaen), es proporcional a la cantidad (con más precisión, al número de núcleos) $A(t)$ de sustancia que queda al tiempo "*t*":

$$\frac{dA}{dt} \alpha A \qquad \text{o sea,} \qquad \frac{dA}{dt} = kA$$

a) Si dos cantidades u y v son proporcionales, se escribe ______. Esto quiere decir que una cantidad es múltiplo constante de la otra: u=kv.

Si damos un vistazo atrás, nos daremos cuenta que la ecuación uno es exactamente igual a la ecuación dos. La diferencia estriba (radica) en la interpretación de los símbolos.

El modelo (1) de crecimiento también puede verse en la ecuación:

$$\frac{dS}{dt} = rS$$

que describe el crecimiento de un capital "*S*" invertido continuamente a una tasa anual "*r*" de enteres compuesto.

En seguida se enuncian algunas ecuaciones que son similares a las anteriores; ecuaciones que sin duda alguna será familiar para el lector.

1. En física se utiliza la expresión que nos ayuda a resolver problemas de velocidad

$$x = vt \longrightarrow \frac{dx}{dt} = v$$

2. En dinámica se emplea la siguiente expresión matemática; que es una de las leyes de Newton.

$$F = ma \longrightarrow F = m\frac{dv}{dt} \longrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

3. En electrónica o física se emplea la siguiente ecuación para calcular el flujo de electrones en un conductor.

$$I = \frac{Q}{t} \longrightarrow i(t) = \frac{dq}{dt} \longrightarrow \frac{dq}{dt} = i$$

ACTIVIDAD 2: Menciona algunas otras ecuaciones o sistemas que implique ecuaciones diferenciales

Con frecuencia los modelos matemáticos se acompañan de condiciones definitorias, (condiciones iniciales); por ejemplo en las ecuaciones 1 y 2, cabria esperar conocer una población inicial, P_0, y la cantidad inicial de la sustancia radiactiva, A_0, respectivamente. Si el tiempo inicial se define como $t = 0$, sabemos que $P(0) = P_0$ y que $A(0) = A_0$. En otras palabras, un modelo matemático está formado por un problema de valor inicial, o por un problema de valores en la frontera.

El modelo de desintegración implica sistemas biológicos; por ejemplo, la determinación de la "vida media" o "periodo medio" de una medicina; es decir, el tiempo que tarda el organismo en eliminar 50% de ella, sea por excreción o por metabolización.

En química, el modelo de decaimiento de $\frac{dA}{dt} = kA$, aparece en la descripción matemática de una reacción química de primer orden; por tal motivo podemos concluir que:

Una sola ecuación diferencial puede ser un modelo matemático de muchos fenómenos distintos

En general, las ecuaciones diferenciales son aplicables a todos los fenómenos de sistemas que son cambiantes.

- LEY DE NEWTON DEL ENFRIAMIENTO O CALENTAMIENTO

$$\frac{dT}{dt}\alpha T - Tm \qquad \text{o sea,} \qquad \frac{dT}{dt} = k(T - Tm)$$

$T(t) =$ Temperatura del objeto en un tiempo "*t*"

$T_m =$ Temperatura del medio que rodea al objeto

$\frac{dT}{dt} =$ Razón con la que la temperatura cambia.

- PROPAGACION DE UNA ENFERMEDAD

Por ejemplo la gripe, que se propaga en la comunidad por contacto

$$\frac{dx}{dt} = kxy$$

$x(t) =$ Numero de personas contagiadas

$y(t) =$ Numero de personas no contagiadas

$\frac{dx}{dt} =$ Razón a la que se propaga la enfermedad; y es proporcional al número de encuentros entre las personas contagiadas y las no contagiadas.

$xy =$ Numero de encuentros

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGENEAS

Se dice que una ecuación diferencial es lineal y homogénea si tiene la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$$

Llamaremos esta ecuación forma estándar de una ecuación diferencial lineal homogénea o FE/EDLH

Generalizando la solución de la ecuación diferencial se trabaja de la manera siguiente

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=-p(x)y \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{y}=-p(x)dx \quad\rightarrow\quad \int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx$$

$$\ln|y|+c_1=-\int p(x)dx \quad\rightarrow\quad \ln|y|=-\int p(x)dx-c_1 \quad\rightarrow\quad \ln|y|=-\int p(x)dx+c$$

La c_1 fue cambiada por la c y además el signo, porque sigue siendo una constante, además la integral de $p(x)$ nos arrojara una constante mas, esta la unimos en cy finalmente tendremos

$$\ln|y|=-\int p(x)dx+c \quad\rightarrow\quad e^{\ln|y|}=e^{-\int p(x)dx+c} \quad\rightarrow\quad y=e^{c}e^{-\int p(x)dx} \quad\rightarrow\quad y=ce^{-\int p(x)dx} \quad (1)$$

Aquí aplicamos la teoría de los exponentes que dice $a^m a^n=a^{m+n}$, pero como e^c es otra constante, la generalizamos como una simple constante c.

EJEMPLO 1

Resolver la ecuación $y' + ay = 0$

Empezamos

Esta ecuación se puede escribir también con la notación de Leibniz* como

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0 \qquad \text{se resuelve}$$

$$\frac{dy}{dx} = -ay \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -adx \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int -adx$$

$$\ln|y| + c_1 = -ax + c_2 \quad \rightarrow \quad \ln|y| = -ax + c \qquad \text{haciendo } c_2 - c_1 = c$$

La ecuación anterior es un buen resultado, sin embargo en ocasiones se desea despejar a la variable dependiente $"y"$; entonces como es una igualdad se procede a emplear lo siguiente:

$$\ln|y| = -ax + c \quad \rightarrow \quad e^{\ln|y|} = e^{-ax+c} \quad \rightarrow \quad y = e^{-ax}e^{c} \quad \text{como } e^{c} \text{ es otra constante}$$

$$y = ce^{-ax}$$

Solución

Otra manera de hacerlo sería simplemente emplear (1)

$y = ce^{-\int p(x)dx}$, sabiendo que $p(x) = a \;\therefore$

$$y = ce^{-\int adx} \quad \rightarrow \quad y = ce^{-ax}$$

$$y = ce^{-ax}$$

Solución

EJEMPLO 2

Resolver la ecuación $xy'+(\ln x)y=0$

¿Tiene la forma estándar?, si la tiene procedemos a resolverla, si no lo tiene le damos la forma.

En este caso, no tiene la forma, por lo tanto dividimos a toda la ecuación diferencial por $"x"$ como sigue y se resuelve como el ejemplo uno.

Empezamos

$$\frac{xy'+(\ln x)y}{x}=\frac{0}{x} \quad\rightarrow\quad \frac{xy'}{x}+\frac{(\ln x)y}{x}=0 \quad\rightarrow\quad y'+\frac{\ln x}{x}y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\ln x}{x}y \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{y}=-\frac{\ln x}{x}dx \quad\rightarrow\quad \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{\ln x}{x}dx$$

Al parecer, la integral $\int\frac{\ln x}{x}dx$, es bastante complicada, todo depende como se analice, pero si tomamos como la variable $u=\ln x$, su diferencial $du=\frac{dx}{x}$, y podemos emplear $\int u^n du$, por lo tanto continuamos con la solución de la ED

$$y=e^c e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} \quad\rightarrow\quad y=ce^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}$$

$$y=e^c e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} \quad\rightarrow\quad y=ce^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}$$

Solución

Otra manera de hacerlo sería simplemente emplear (1)

$y=ce^{-\int p(x)dx}$, sabiendo que $p(x)=\frac{(\ln x)}{x}$ $\therefore$

$$y=ce^{-\int\frac{(\ln x)}{x}dx} \quad\rightarrow\quad y=ce^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}$$

$$y = ce^{-\int \frac{(\ln x)}{x}dx} \quad \rightarrow \quad y = ce^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}$$

Solución

EJEMPLO 3

Resolver la ecuación $x^2 y' + y = 0$

¿Tiene la forma estándar?, si la tiene procedemos a resolverla, si no lo tiene le damos la forma.

En este caso, no tiene la forma, por lo tanto dividimos a toda la ecuación diferencial por x^2 como sigue y se resuelve como el ejemplo uno.

Empezamos

$$x^2 y' + y = 0 \quad \rightarrow \quad y' + \frac{1}{x^2} y = 0 \quad \rightarrow \quad y = ce^{-\int \frac{dx}{x^2}} \quad \rightarrow \quad y = ce^{-\int x^{-2}dx}$$

$$y = ce^{-\frac{x^{-2+1}}{-2+1}} \quad \rightarrow \quad y = ce^{-\frac{x^{-1}}{-1}} \quad \rightarrow \quad y = ce^{x^{-1}} \quad \rightarrow \quad y = ce^{1/x}$$

$$y = ce^{1/x}$$

Solución

EJEMPLO 4

Resolver la siguiente ecuación diferencial con valor inicial

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}\,y = 0, \quad y(0) = 2$$

Como podemos darnos cuenta, tiene la forma estándar; por lo tanto, empezamos por resolverla empleando (1)

Empezamos

$$y = ce^{-\int -\frac{2x}{1+x^2}dx} \;\rightarrow\; y = ce^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} \;\rightarrow\; y = ce^{\ln\left|1+x^2\right|} \;\rightarrow\; y = c(1+x^2)$$

Una vez resuelta la ecuación diferencial, empleamos las condiciones iniciales $y(0) = 2$ esto es, cuando $x = 0, \quad y = 2$

$y = c(1+x^2) \;\rightarrow\; 2 = c\left[1+(0)^2\right] \;\rightarrow\; c = 2$; por lo tanto la solución particular es

$$y = 2(1+x^2)$$

$$y = 2(1+x^2)$$

Solución

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Resuelve las siguiente ecuación diferencial $y'+3x^2y=0$

   Solución: $y=ce^{-x^3}$

2. Resuelve la siguiente ecuación diferencial $xy'+3y=0$

   Solución: $y=\dfrac{c}{x^3}$

3. Resuelve la siguiente ecuación diferencial $y'+\dfrac{1+x}{x}y=0, \quad y(1)=1$

   Solución: $y=\dfrac{e^{1-x}}{x}$

4. Resuelve la siguiente ecuación diferencial

   $xy'+(1+x\cot x)y=0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$

   Solución: $y=\dfrac{\pi}{xsenx}$

5. Resuelve la siguiente ecuación diferencial $xy'+\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right)y=0, \quad y(e)=1$

   Solución: $y=\dfrac{e}{x\ln x}$

6. Resuelve la siguiente ecuación diferencial $y'+\dfrac{k}{x}y=0, \quad y(1)=3$

   Solución: $y=\dfrac{3}{x^k}$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGENEAS

Ahora daremos un paso más, en la parte anterior trabajamos con la ecuación diferencial homogénea, $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$. Si a la ecuación diferencial, la igualamos a una función que dependa de x, quedaría de la siguiente manera.

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$$

A esta ecuación la llamaremos ecuación diferencial lineal no homogénea, donde $p(x)$ y $f(x)$ dependen de la variable "x".

Para cualquier ecuación diferencial que se le pueda dar esta forma, podemos resolverla de dos maneras.

a) Igualando la función a cero y resolviendo la ecuación diferencial homogénea, para posteriormente utilizar variación de parámetros
b) Buscando un factor integrante, el cual surge de integrar la función $p(x)$.

Generalizando la solución según el inciso b, la ecuación diferencial se trabaja de la manera siguiente:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x) \quad \rightarrow \quad \phi(x)=e^{\int p(x)dx} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\phi(x)y\right)=\phi(x)f(x)$$

$$d\left(\phi(x)y\right)=\phi(x)f(x)dx \quad \rightarrow \quad \int d\left(\phi(x)y\right)=\int \phi(x)f(x)dx \quad \rightarrow \quad \phi(x)y=\int \phi(x)f(x)dx$$

Finalmente tenemos la solución $y=\frac{\int \phi(x)f(x)dx}{\phi(x)}$

Donde $\phi(x)$, es el factor integrante.

EJEMPLO 1

Resuelva la siguiente ecuación diferencial $y'+\frac{1}{x}y=\frac{7}{x^2}+3$

Para esto, primero observamos si la ecuación diferencial tiene la forma $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$; como si la tiene resolvemos la parte homogénea

Empezamos

$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$, esto es $y'+\frac{1}{x}y=0$.

$$y'+\frac{1}{x}y=0 \quad\rightarrow\quad y=ce^{-\int p(x)dx} \quad\rightarrow\quad y=ce^{-\int\frac{1}{x}dx} \quad\rightarrow\quad y=ce^{-\ln|x|}$$

$y=ce^{\ln|x|^{-1}} \quad\rightarrow\quad y=cx^{-1} \quad\rightarrow\quad y=\frac{c}{x}$, hasta aquí, hemos hecho lo que ya sabemos, ahora tenemos que cambiar la constante por una variable, que en este caso será una u y a la función nueva la llamaremos parte de la solución o **PS**.

$$PS \quad\Rightarrow\quad y=\frac{u}{x}$$

Ahora que tenemos a *PS*, lo derivamos y sustituimos en la ecuación diferencial que tiene la forma estándar

$y=\frac{u}{x} \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x\frac{du}{dx}-u\frac{dx}{dx}}{x^2}$ o más sencillo $y'=\frac{xu'-u(1)}{x^2} \quad\rightarrow\quad y'=\frac{xu'}{x^2}-\frac{u}{x^2}$

Esta ultima ecuación y **PS** la sustituimos en la ecuación que tiene la forma $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$; nótese que $\frac{dy}{dx}$ es lo mismo que y', y $u'=\frac{du}{dx}$.

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{7}{x^2}+3 \quad\rightarrow\quad \frac{u'}{x}-\frac{u}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{u}{x}=\frac{7}{x^2}+3 \quad\rightarrow\quad \frac{u'}{x}=\frac{7}{x^2}+3 \quad\rightarrow\quad u'=\frac{7x}{x^2}+3x$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{7}{x}+3x \quad\rightarrow\quad du=\left(\frac{7}{x}+3x\right)dx \quad\rightarrow\quad du=7\frac{dx}{x}+3xdx \quad\rightarrow\quad \int du=7\int\frac{dx}{x}+3\int xdx$$

$u=7\ln|x|+\frac{3}{2}x^2+c$, este último resultado lo sustituimos en PS y obtenemos el resultado

$$y=\frac{u}{x} \quad\rightarrow\quad y=\frac{7\ln|x|+\frac{3}{2}x^2+c}{x}$$

$$y=\frac{7\ln|x|+\frac{3}{2}x^2+c}{x}$$

Solución

Otra manera de resolver el problema es buscar un factor integrante $\phi(x)=e^{\int p(x)dx}$, para emplear la expresión $\frac{d}{dx}(\phi(x)y)=\phi(x)f(x)$; esta expresión es aplicable siempre y cuando la ecuación diferencial tenga la forma estándar $y'+p(x)y=f(x)$. Para la ecuación diferencial y además reconocer las funciones $p(x)$ y $f(x)$; en este caso tenemos los siguientes datos:

$$p(x)=\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad f(x)=\frac{7}{x^2}+3$$

Por lo tanto tenemos

$\phi(x)=e^{\int p(x)dx} \quad\rightarrow\quad \phi(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx} \quad\rightarrow\quad \phi(x)=e^{\ln|x|} \quad\rightarrow\quad \phi(x)=x$ y finalmente

$$\frac{d}{dx}(\phi(x)y)=\phi(x)f(x) \quad\rightarrow\quad \frac{d}{dx}(xy)=x\left(\frac{7}{x^2}+3\right) \quad\rightarrow\quad d(xy)=x\left(\frac{7}{x^2}+3\right)dx$$

$$\int d(xy)=\int x\left(\frac{7}{x^2}+3\right)dx \quad\rightarrow\quad xy=7\int\frac{dx}{x}+3\int xdx \quad\rightarrow\quad xy=7\ln|x|+\frac{3}{2}x^2+c$$

$$y = \frac{7\ln|x| + \frac{3}{2}x^2 + c}{x}$$

$$y = \frac{7\ln|x| + \frac{3}{2}x^2 + c}{x}$$

Solución

EJEMPLO 2

Resuelve la siguiente ecuación diferencial $y' + 2y = x^3 e^{-2x}$

Primero resolvemos la parte homogénea.

$y' + 2y = 0$, de donde sabemos que la solución es como las anteriores

$y = ce^{-\int p(x)dx}$

Empezamos

$$y' + 2y = 0 \quad \rightarrow \quad y = ce^{-\int p(x)dx} \quad \rightarrow \quad y = ce^{-\int 2dx} \quad \rightarrow \quad y = ce^{-2x} \quad \textbf{PS} \Rightarrow y = ue^{-2x}$$

Derivamos a **PS** $y' = -2ue^{-2x} + e^{-2x}u'$, esta ecuación la sustituimos en la ED que tiene la forma estándar incluyendo a **PS,** como en seguida.

$$y' + 2y = x^3e^{-2x} \quad \rightarrow \quad -2ue^{-2x} + e^{-2x}u' + 2ue^{-2x} = x^3e^{-2x} \quad \rightarrow \quad e^{-2x}u' = x^3e^{-2x}$$

$$u' = \frac{x^3e^{-2x}}{e^{-2x}} \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = x^3 \quad \rightarrow \quad du = x^3dx \quad \rightarrow \quad u = \frac{x^4}{4} + c$$

Finalmente sustituimos "u"en PS y el resultado es el siguiente

$$y = ue^{-2x} \quad \rightarrow \quad y = \left(\frac{x^4}{4} + c\right)e^{-2x}$$

$$y=\left(\frac{x^4}{4}+c\right)e^{-2x}$$

Solucion

Otra manera de resolver el problema es buscar un factor integrante $\phi(x)=e^{\int p(x)dx}$, para emplear la expresión $\frac{d}{dx}(\phi(x)y)=\phi(x)f(x)$; esta expresión es aplicable siempre y cuando la ecuación diferencial tenga la forma estándar $y'+p(x)y=f(x)$. Para la ecuacion diferencial y además reconocer las funciones $p(x)$ y $f(x)$; en este caso tenemos los siguientes datos:

$$p(x)=2 \quad \text{y} \quad f(x)=x^3e^{-2x}$$

Por lo tanto tenemos

$$\phi(x)=e^{\int 2dx} \quad \rightarrow \quad \phi(x)=e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx}(\phi(x)y)=\phi(x)f(x) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(e^{2x}y\right)=e^{2x}x^3e^{-2x} \quad \rightarrow \quad d\left(e^{2x}y\right)=x^3dx$$

$$e^{2x}y=\frac{x^4}{4}+c \quad \rightarrow \quad y=\frac{\frac{x^4}{4}+c}{e^{2x}} \quad \rightarrow \quad y=\left(\frac{x^4}{4}+c\right)e^{-2x}$$

$$y=\left(\frac{x^4}{4}+c\right)e^{-2x}$$

Solucion

EJEMPLO 3

Resolver la ecuación Diferencial $y'+\frac{4}{x-1}y=\frac{1}{(x-1)^5}+\frac{sen(x)}{(x-1)^4}$

La solución aplicando factor integrante; para esto tenemos que conocer las funciones $p(x)$ y $f(x)$, en este caso tenemos los siguientes datos:

$p(x)=\dfrac{4}{x-1}, \quad \to \quad f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^5}+\dfrac{sen(x)}{(x-1)^4}$, ahora se debe encontrar un factor integrante, que lo obtenemos de la siguiente manera $\phi(x)=e^{\int p(x)dx}$

Empezamos

$$\phi(x)=e^{\int p(x)dx} \quad \to \quad \phi(x)=e^{\int \frac{4}{x-1}dx} \quad \to \quad \phi(x)=e^{4\int \frac{dx}{x-1}} \quad \to \quad \phi(x)=e^{4\ln(x-1)}$$

$$\phi(x)=e^{\ln(x-1)^4} \quad \to \quad \phi(x)=(x-1)^4$$

Ahora empleamos $\dfrac{d}{dx}\left(\phi(x)y\right)=\phi(x)f(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\phi(x)y\right)=\phi(x)f(x) \quad \to \quad \frac{d}{dx}\left((x-1)^4 y\right)=(x-1)^4\left[\frac{1}{(x-1)^5}+\frac{sen(x)}{(x-1)^4}\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left((x-1)^4 y\right)=\frac{1}{(x-1)^1}+sen(x) \quad \to \quad d\left((x-1)^4 y\right)=\left[\frac{1}{(x-1)}+sen(x)\right]dx$$

$$\int d\left((x-1)^4 y\right)=\int\left[\frac{1}{(x-1)}+sen(x)\right]dx \quad \to \quad (x-1)^4 y=\int\frac{dx}{(x-1)}+\int sen(x)dx$$

$$(x-1)^4 y=\ln|x-1|-\cos(x)+c \quad \to \quad y=\frac{\ln|x-1|-\cos(x)+c}{(x-1)^4}$$

$$y=\frac{\ln|x-1|-\cos(x)+c}{(x-1)^4}$$

Solución

EJEMPLO 4

Resolver la ecuación Diferencial $xy'+\left(1+2x^2\right)y=x^3e^{-x^2}$

Observando la ED, nos podemos dar cuenta que no tiene la forma estándar

$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$, por tanto, podemos arreglarla dividiendo toda la ecuacion entre x.

Empezamos

$$xy'+\left(1+2x^2\right)y=x^3e^{-x^2} \quad\rightarrow\quad \frac{xy'+\left(1+2x^2\right)y}{x}=\frac{x^3e^{-x^2}}{x} \quad\rightarrow\quad \frac{xy'}{x}+\frac{\left(1+2x^2\right)y}{x}=\frac{x^3e^{-x^2}}{x}$$

$$y'+\frac{\left(1+2x^2\right)}{x}y=x^2e^{-x^2}$$

Ahora podemos resolver aplicando factor integrante; para esto tenemos que

Conocer las funciones $p(x)$ y $f(x)$, en este caso tenemos los siguientes datos:

$p(x)=\frac{\left(1+2x^2\right)}{x} \quad\rightarrow\quad f(x)=x^2e^{-x^2}$, después de conocer esto, se busca el factor integrante factor, que lo conseguimos de la siguiente manera $\phi(x)=e^{\int p(x)dx}$

Empezamos

$$\phi(x)=e^{\int p(x)dx} \quad\rightarrow\quad \phi(x)=e^{\int\frac{\left(1+2x^2\right)}{x}dx} \quad\rightarrow\quad \phi(x)=e^{\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2x^2}{x}\right)dx} \quad\rightarrow\quad \phi(x)=e^{\int\frac{dx}{x}+\int 2xdx}$$

$$\phi(x)=e^{\int\frac{dx}{x}+2\int xdx} \quad\rightarrow\quad \phi(x)=e^{\ln(x)+\frac{2x^2}{2}} \quad\rightarrow\quad \phi(x)=e^{\ln x}e^{x^2} \quad\rightarrow\quad \phi(x)=xe^{x^2}$$

Ahora empleamos $\frac{d}{dx}(\phi(x)y)=\phi(x)f(x)$

$$\frac{d}{dx}(\phi(x)y)=\phi(x)f(x) \quad\rightarrow\quad \frac{d}{dx}\left(xe^{x^2}y\right)=xe^{x^2}x^2e^{-x^2} \quad\rightarrow\quad \frac{d}{dx}\left(xe^{x^2}y\right)=x^3$$

$$d\left(xe^{x^2}y\right)=x^3dx \quad\rightarrow\quad \int d\left(xe^{x^2}y\right)=\int x^3dx \quad\rightarrow\quad xe^{x^2}y=\frac{x^4}{4}+c$$

$$y=\frac{\frac{x^4}{4}+c}{xe^{x^2}} \rightarrow y=\frac{x^4}{4xe^{x^2}}+\frac{c}{xe^{x^2}} \rightarrow y=\frac{x^3}{4e^{x^2}}+\frac{c}{xe^{x^2}} \rightarrow y=\left(\frac{x^3}{4}+\frac{c}{x}\right)e^{-x^2}$$

$$y=\left(\frac{x^3}{4}+\frac{c}{x}\right)e^{-x^2}$$

Solución

EJEMPLO 5

Resolver la ecuación Diferencial $y'+(\tan(x))\,y=\cos(x)$

En la ED. reconocemos fácilmente que $p(x)=\tan(x) \quad \rightarrow \quad f(x)=\cos(x)$, ahora buscamos el factor integrante $\phi(x)=e^{\int p(x)dx}$

Empezamos

$$\phi(x)=e^{\int p(x)dx} \rightarrow \phi(x)=e^{\int \tan(x)dx} \rightarrow \phi(x)=e^{-\ln(\cos(x))} \rightarrow \phi(x)=e^{\ln(\cos(x))^{-1}}$$

$$\phi(x)=(\cos(x))^{-1} \rightarrow \phi(x)=\frac{1}{\cos(x)}$$

Ahora empleamos $\frac{d}{dx}(\phi(x)y)=\phi(x)f(x)$

$$\frac{d}{dx}(\phi(x)y)=\phi(x)f(x) \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos(x)}y\right)=\frac{1}{\cos(x)}\cos(x) \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos(x)}y\right)=1$$

$$d\left(\frac{1}{\cos(x)}y\right)=dx \rightarrow \int d\left(\frac{1}{\cos(x)}y\right)=\int dx \rightarrow \left(\frac{1}{\cos(x)}y\right)=x+c \rightarrow y=(x+c)\cos(x)$$

$$y=(x+c)\cos(x)$$

Solución

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Resuelve las siguiente ecuación diferencial $y'+3y=1$

   Solución: $y=\frac{1}{3}+ce^{-3x}$

2. Resuelve la siguiente ecuación diferencial $y'+\left(\frac{1}{x}-1\right)y=-\frac{2}{x}$

   Solución: $y=\frac{2}{x}+\frac{c}{x}e^{x}$

3. Resuelve la siguiente ecuación diferencial $y'+2xy=xe^{-x^2}$

   Solución: $y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$

4. Resuelve la siguiente ecuación diferencial $y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{e^{-x}}{1+x^2}$

   Solución: $y=-\frac{e^{-x}+c}{1+x^2}$

5. Resuelve la siguiente ecuación diferencial $y'+\frac{1}{x}y=\frac{7}{x^2}+3$

   Solución: $y=\frac{7\ln|x|}{x}+\frac{3}{2}x+\frac{c}{x}$

6. Resuelve la siguiente ecuación diferencial $y'+\frac{4}{x-1}y=\frac{1}{(x-1)^5}+\frac{sen(x)}{(x-1)^4}$

   Solución: $y=(x-1)^{-4}\left(\ln|x-1|-\cos x+c\right)$

7. Resuelve la siguiente ecuación diferencial $xy'+(1+2x^2)y=x^3e^{-x^2}$

   Solución: $y=e^{-x^2}\left(\frac{x^3}{4}+\frac{c}{x}\right)$

ECUACIONES DIFERENCIAL DE BERNOULLI

BERNOULLI

La ecuación de Bernoulli tiene la forma $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^r$, esta con la notación de Leibniz; el cual también se puede escribir en notación con primas como $y'+p(x)y=f(x)y^r$; con $r\geq 1$. Cualquier ecuación diferencial que podamos llevar a esta forma, se llama ecuación de Bernoullí; y se resuelve como a continuación

Solución general para la ecuación de BERNOULLI

$y'+p(x)y=f(x)y^r$, primero resolvemos la parte homogénea, esto es igualamos a cero el lado izquierdo de la ecuación diferencial.

$y'+p(x)y=0$, esta ecuación diferencial la podemos resolver como lo hicimos antes o bien generalizar para esta

$y'+p(x)y=0 \quad \to\to \quad y=ce^{-\int p(x)dx}$, cualquier ecuación diferencial de la forma $y'+p(x)y=0$, la solución es $y=ce^{-\int p(x)dx}$; que es el resultado que se obtuvo en el tema relacionado a ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

Para el caso de la ecuación de Bernoulli, solo generalizaremos un poquito, sabemos que $e^{-\int p(x)dx}$, es una función que depende de la variable x, por tal motivo no tendremos problema alguno si lo llamamos para nuestra generalización como $y_1(x)=e^{-\int p(x)dx}$, y además la constante "c" la reemplazamos con "u", el cual es una técnica llamada variación de parámetros. Entonces haciendo esas consideraciones tenemos

$$y'+p(x)y=f(x)y^r \quad \text{tomamos la parte homogenea } y'+p(x)y=0$$

$$y'+p(x)y=0 \quad \to \quad y(x)=ce^{-\int p(x)dx} \quad \to \quad y=uy_1(x)$$

Lo que sigue es derivar a la función $y=uy_1(x)$, el cual llamamos ***PS*** y sustituirlo en la ecuación que ya se le dio la forma de ecuación de Bernoulli

$y=uy_1(x) \quad \rightarrow \quad y'=uy_1'(x)+u'y_1(x)$, sustituyendo esta ecuación en $y'+p(x)y=f(x)y^r$, tenemos

$$y'+p(x)y=f(x)y^r \quad \rightarrow \quad [uy_1'(x)+u'y_1(x)]+p(x)[uy_1(x)]=f(x)[uy_1(x)]^r$$

$$uy_1'(x)+u'y_1(x)+p(x)uy_1(x)=f(x)u^r y_1^r(x) \quad \rightarrow \quad u'y_1(x)+u[y_1'(x)+p(x)y_1(x)]=f(x)u^r y_1^r(x)$$

Haciendo $y'+p(x)y=0$ igual a $y_1'(x)+p(x)y_1(x)=0$, con $y=y_1(x)$

Tenemos

$$u'y_1(x)+u[0]=f(x)u^r y_1^r(x) \quad \rightarrow \quad u'y_1(x)=f(x)u^r y_1^r(x) \quad \rightarrow \quad u'=\frac{f(x)u^r y_1^r(x)}{y_1(x)}$$

$$u'=f(x)u^r y_1^{r-1}(x) \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx}=f(x)u^r y_1^{r-1}(x) \quad \rightarrow \quad du=f(x)u^r y_1^{r-1}(x)dx$$

$$\frac{du}{u^r}=f(x)y_1^{r-1}(x)dx \quad \rightarrow \quad \int\frac{du}{u^r}=\int f(x)y_1^{r-1}(x)dx$$

Restituyendo el valor de "u" en **PS, es decir** $y=uy_1(x)$ tenemos

$y=uy_1(x) \quad \rightarrow \quad y=\left[\int f(x)u^r y_1^{r-1}(x)dx+C\right]y_1(x)$, comencemos con un ejemplo

EJEMPLO 1

Resolver la ecuación diferencial $y'+y=y^2$ aplicando Bernoulli

Para iniciar, observamos si tiene la forma de la ecuación de Bernoulli, si no la tiene le damos la forma, y si no cumple, buscamos otra técnica. Parece ser que esta es adecuada para aplicar Bernoulli

Empezamos

$y'+y=y^2$ tomamos la parte $y'+y$ y la igualamos a cero, esto se resuelve como ya sabemos

$$y'+y=0 \quad \rightarrow \quad y=ce^{-\int p(x)dx}$$

Donde p(x) es el coeficiente que acompaña a “ y ”, en este caso es 1, por lo tanto tenemos

$$y=ce^{-\int p(x)dx} \quad \rightarrow \quad y=ce^{-\int dx} \quad \rightarrow \quad y=ce^{-x} \quad \rightarrow \quad PS \quad y=ue^{-x}$$

Derivando a PS y sustituyendo en $y'+y=y^2$

$$PS \quad y=ue^{-x}, \quad \rightarrow \quad y'=-ue^{-x}+e^{-x}u',$$

Sustituyendo y' y y en la ecuacion de Bernoulli $y'+y=y^2$

$$y'+y=y^2 \quad \rightarrow \quad -ue^{-x}+e^{-x}u'+ue^{-x}=\left[ue^{-x}\right]^2 \quad \rightarrow \quad e^{-x}u'=u^2e^{-2x} \quad \rightarrow \quad u'=\frac{u^2e^{-2x}}{e^{-x}}$$

$$u'=\frac{u^2e^{-2x}}{e^{-x}} \quad \rightarrow \quad u'=u^2e^{-2x}e^{x} \quad \rightarrow \quad u'=u^2e^{-x} \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx}=u^2e^{-x} \quad \rightarrow \quad du=u^2e^{-x}dx$$

$$du=u^2e^{-x}dx \quad \rightarrow \quad \frac{du}{u^2}=e^{-x}dx \quad \rightarrow \quad u^{-2}du=e^{-x}dx \quad \rightarrow \quad \int u^{-2}du=\int e^{-x}dx \quad \rightarrow \quad \frac{u^{-2+1}}{-2+1}=-e^{-x}+C$$

$$\frac{u^{-1}}{-1}=-e^{-x}+C \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{u}=-e^{-x}+C \quad \rightarrow \quad \left[-\frac{1}{u}=-e^{-x}+C\right](-1) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{u}=e^{-x}+C$$

$$\frac{1}{u}=e^{-x}+C \quad \rightarrow \quad u=\frac{1}{e^{-x}+C}$$

Restituyendo el valor de “u” en PS, o sea $y=ue^{-x}$ tenemos lo siguiente

$$y=ue^{-x} \quad \rightarrow \quad y=\left[\frac{1}{e^{-x}+C}\right]e^{-x} \quad \rightarrow \quad y=\left[\frac{1}{e^{-x}+C}\right]\frac{1}{e^{x}} \quad \rightarrow \quad y=\left[\frac{1}{e^{-x}e^{x}+Ce^{x}}\right]$$

$$y=\left[\frac{1}{e^{-x}e^{x}+Ce^{x}}\right] \quad \rightarrow \quad y=\frac{1}{e^{0}+Ce^{x}} \quad \rightarrow \quad y=\frac{1}{1+Ce^{x}}$$

$$y=\frac{1}{1+Ce^{x}}$$

Solución

EJEMPLO 2

Resolver la siguiente ecuación diferencial aplicando Bernoulli

$$x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{y^2}$$

Observamos la ecuación diferencial para ver si tiene la forma $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^r$

Parece que no cumple, por lo tanto tratamos de llevarlo a la forma estándar, la $"x"$ está afectando, por lo tanto dividimos a toda la ecuación entre $"x"$ como sigue.

Empezamos

$x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{y^2} \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{1}{xy^2} \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}y^{-2}$ si observamos, la ecuación diferencial cuenta con lo siguiente $p(x)=\frac{1}{x},\ f(x)=\frac{1}{x}, r=-2$ y ya tiene la forma de ecuación de Bernoulli; por lo tanto aplicamos el método

Empezamos

Ya de aquí en adelante trabajaremos con la forma estándar, es decir la ecuación que ya tiene la forma de ecuación de Bernoulli

$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}y^{-2}$ tomamos la parte izquierda

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0 \quad\rightarrow\quad y=ce^{-\int p(x)dx} \quad\rightarrow\quad y=ce^{-\int\frac{1}{x}dx} \quad\rightarrow\quad y=ce^{-\ln(x)} \quad\rightarrow\quad y=ce^{\ln(x)^{-1}}$$

$$y=ce^{\ln(x)^{-1}} \quad\rightarrow\quad y=cx^{-1} \quad\rightarrow\quad y=\frac{c}{x} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{u}{x} \qquad PS$$

Lo que sigue es derivar a **PS**

$$y=\frac{u}{x}\quad\to\quad y'=\frac{xu'-u}{x^2}\quad\to\quad y'=\frac{xu'}{x^2}-\frac{u}{x^2}\quad\to\quad y'=\frac{u'}{x}-\frac{u}{x^2}$$

Ahora, sustituimos a y y y' en la forma estándar de la ecuación diferencial, sabiendo que $y'=\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}y^{-2}\quad\to\quad \frac{u'}{x}-\frac{u}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{u}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{u}{x}\right)^{-2}\quad\to\quad \frac{u'}{x}=\frac{1}{x}\frac{u^{-2}}{x^{-2}}\quad\to\quad \frac{u'}{x}=\frac{u^{-2}}{x^{-1}}$$

$$\frac{u'}{x}=\frac{u^{-2}}{x^{-1}}\quad\to\quad \frac{u'}{x}=\frac{x}{u^2}\quad\to\quad u^2u'=x^2\quad\to\quad u^2\frac{du}{dx}=x^2\quad\to\quad u^2du=x^2dx$$

$$u^2du=x^2dx\quad\to\quad \int u^2du=\int x^2dx\quad\to\quad \frac{u^3}{3}=\frac{x^3}{3}+c\quad\to\quad u^3=x^3+c$$

$$u^3=x^3+c\quad\to\quad u=\sqrt[3]{x^3+c}$$

Sustituyendo el valor de u en **PS** tenemos lo siguiente

$$y=\frac{u}{x}\quad\to\quad y=\frac{\sqrt[3]{x^3+c}}{x}$$ Esta es la solución explicita

O si deseamos la solución implícita

$$y=\frac{u}{x}\quad\to\quad y=\frac{\sqrt[3]{x^3+c}}{x}\quad\to\quad (y)^3=\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+c}}{x}\right)^3\quad\to\quad y^3=\frac{x^3+c}{x^3}\quad\to\quad y^3=\frac{x^3}{x^3}+\frac{c}{x^3}$$

$$y^3=1+\frac{c}{x^3}\quad\to\quad y^3=1+cx^{-3}$$

$$\boxed{y^3=1+cx^{-3}}$$

Solución

EJEMPLO 3

Resolver la siguiente ecuación diferencial aplicando Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} = y\left(xy^3 - 1\right)$$

Parece que esta no tiene la forma de ecuación de Bernoulli $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^r$

Pero nos esforzaremos por acomodarlo a la forma estándar y comenzar a trabajar

Empezamos

$\frac{dy}{dx} = y\left(xy^3 - 1\right) \rightarrow \frac{dy}{dx} = xy^4 - y \rightarrow \frac{dy}{dx} + y = xy^4$, esta última es la forma estándar de la ecuación de Bernoulli y trabajaremos con ella de aquí en adelante.

$\frac{dy}{dx} + y = xy^4$, de aquí $p(x) = 1,\ f(x) = x, r = 4$

Comenzamos

$\frac{dy}{dx} + y = xy^4$ tomamos la parte homogénea para hallar parte de la solución

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \rightarrow y = ce^{-\int p(x)dx} \rightarrow y = ce^{-\int (1)dx} \rightarrow y = ce^{-x} \rightarrow y = ue^{-x} \quad \textbf{PS}$$

Ahora derivamos a PS y sustituimos y y y' en la **forma estándar** (FE) de la ecuación de Bernoulli

$$y = ue^{-x} \rightarrow y' = -ue^{-x} + e^{-x}u'$$

$$\frac{dy}{dx}+y=xy^4 \quad\rightarrow\quad -ue^{-x}+e^{-x}u'+ue^{-x}=x\left(ue^{-x}\right)^4 \quad\rightarrow\quad e^{-x}u'=xu^4e^{-4x} \quad\rightarrow\quad \frac{u'}{u^4}=\frac{xe^{-4x}}{e^{-x}}$$

$$\frac{1}{u^4}\frac{du}{dx}=xe^{-3x} \quad\rightarrow\quad \frac{du}{u^4}=xe^{-3x}dx \quad\rightarrow\quad \int\frac{du}{u^4}=\int xe^{-3x}dx \quad\rightarrow\quad \frac{u^{-3}}{-3}=-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+c$$

$$\left(\frac{u^{-3}}{-3}=-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+c\right)(-3) \quad\rightarrow\quad u^{-3}=xe^{-3x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+c \quad\rightarrow\quad \frac{1}{u^3}=xe^{-3x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+c$$

$$u^3=\frac{1}{xe^{-3x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+c} \quad\rightarrow\quad u=\left(\frac{1}{xe^{-3x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+c}\right)^{1/3} \quad\rightarrow\quad u=\frac{(1)^{1/3}}{\left(xe^{-3x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+c\right)^{1/3}}$$

$$u=\frac{1}{\left(e^{-3x}\left(x+\frac{1}{3}+ce^{3x}\right)\right)^{1/3}} \quad\rightarrow\quad u=\frac{1}{\left(e^{-3x}\right)^{1/3}\left(x+\frac{1}{3}+ce^{3x}\right)^{1/3}} \quad\rightarrow\quad u=\frac{1}{e^{-x}\left(x+\frac{1}{3}+ce^{3x}\right)^{1/3}}$$

Tenemos el valor de "u", esto finalmente lo sustituimos en **PS** y la arreglamos para obtener la solución esperada

$y=ue^{-x} \quad\rightarrow\quad y=\dfrac{1}{e^{-x}\left(x+\frac{1}{3}+ce^{3x}\right)^{1/3}}e^{-x} \quad\rightarrow\quad y=\dfrac{1}{\left(x+\frac{1}{3}+ce^{3x}\right)^{1/3}}$, esta es la solución de la ecuación diferencial en forma explícita o en forma implícita

$$y^3=\frac{1}{x+\frac{1}{3}+ce^{3x}}$$

$$y^3=\frac{1}{x+\frac{1}{3}+ce^{3x}}$$

Solución

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE (BERNOULLI)

1. Resolver las siguiente ecuación diferencial $x^2y'+2y=2e^{1/x}y^{1/2}$

   Solución: $y=e^{2/x}\left(c-\frac{1}{x}\right)^2$

2. Resolver las siguiente ecuación diferencial $(1+x^2)y'+2xy=\frac{1}{(1+x^2)y}$

   Solución: $y=\pm\frac{\sqrt{2x+c}}{1+x^2}$

3. Resolver las siguiente ecuación diferencial $y'-xy=x^3y^3$

   Solución: $y=\pm\left(1-x^2+ce^{-x^2}\right)^{-1/2}$

4. Resolver las siguiente ecuación diferencial $y'-2y=xy^3, \quad y(0)=2\sqrt{2}$

   Solución: $y=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-4x}}$

5. Resolver las siguiente ecuación diferencial $y'-xy=xy^{3/2}, \quad y(1)=4$

   Solución: $y=\left[1-\frac{3}{2}e^{-\frac{(x^2-1)}{4}}\right]^{-2}$

6. Resolver las siguiente ecuación diferencial $y'-4y=\frac{48x}{y^2}, \quad y(0)=1$

   Solución: $y=\left(2e^{12x}-1-12x\right)^{1/3}$

7. Resolver las siguiente ecuación diferencial $y'-y=xy^{1/2}, \quad y(0)=4$

   Solución: $y=(4e^{x/2}-x-2)^2$

VARIABLES SEPARABLES

VARIABLES SEPARABLES

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y) \text{ o de la forma } \frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{h(y)}$$

Se dice que es separable o que tiene variables separables

EJEMPLO 1

Resolver la ecuación Diferencial $\frac{dy}{dx}=e^{3x+2y}$

Un análisis simple nos indica que podemos separar las variables

Empezamos

$$\frac{dy}{dx}=e^{3x+2y} \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=e^{3x}e^{2y} \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{e^{2y}}=e^{3x}dx \quad\rightarrow\quad e^{-2y}dy=e^{3x}dx$$

$$\int e^{-2y}dy=\int e^{3x}dx \quad\rightarrow\quad \left(-\frac{1}{2}\right)\int e^{-2y}(-2)dy=\left(\frac{1}{3}\right)\int e^{3x}(3)dx$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2y}=\frac{1}{3}e^{3x}+c \quad\rightarrow\quad \left(-\frac{1}{2}e^{-2y}=\frac{1}{3}e^{3x}+c\right)(6) \quad\rightarrow\quad -3e^{-2y}=2e^{3x}+c$$

$$-3e^{-2y}=2e^{3x}+c$$

$$-3e^{-2y} = 2e^{3x} + c$$

Solución

EJEMPLO 2

Resolver la ecuación Diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{x^2-1}, \quad y(2)=2$

A simple vista, esta ecuación es separable y además puede factorizarse mediante diferencia de cuadrados. Hay que considerar que la ecuación diferencial tiene condiciones iníciales, las cuales se utilizaran al resolver la ED.

Empezamos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{x^2-1} \quad \to \quad \frac{dy}{y^2-1} = \frac{dx}{x^2-1} \quad \to \quad \frac{dy}{(y-1)(y+1)} = \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$\left(\frac{1}{(y-1)(y+1)}\right)dy = \left(\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right)dx$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad \Rightarrow \quad A = \left.\frac{1}{x+1}\right|_{x=1}^{x-1=0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad B = \left.\frac{1}{x-1}\right|_{x=-1}^{x+1=0} = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{A_1}{y-1} + \frac{B_1}{y+1}\right)dy = \left(\frac{A_2}{x-1} + \frac{B_2}{x+1}\right)dx \quad \to \quad \left(\frac{1/2}{y-1} + \frac{-1/2}{y+1}\right)dy = \left(\frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}\right)dx$$

$$\int\left(\frac{1/2}{y-1} + \frac{-1/2}{y+1}\right)dy = \int\left(\frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}\right)dx \quad \to \quad \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y+1} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{2}\ln|y+1| = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c \quad \to \quad (2)\left(\frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{2}\ln|y+1| = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c\right)$$

$$\ln|y-1| - \ln|y+1| = \ln|x-1| - \ln|x+1| + c \quad \to \quad \ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + c$$

$$e^{\ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right)} = e^{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+c} \quad \rightarrow \quad \frac{y-1}{y+1} = e^{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} e^{c} \quad \rightarrow \quad \frac{y-1}{y+1} = c\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Empleando las condiciones iniciales $y(2)=2$, esto es $x=2, \quad y=2$

$$\frac{y-1}{y+1} = c\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{2-1}{2+1} = c\left(\frac{2-1}{2+1}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} = c\frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad c=1$$

$$\therefore \quad \frac{y-1}{y+1} = c\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{y-1}{y+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{y-1}{y+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

SOLUCION

EJEMPLO 3

Resolver la ecuación Diferencial $ydy = x(1+x^2)^{-1/2}(1+y^2)^{1/2}dx$

Empezamos

$$ydy = x(1+x^2)^{-1/2}(1+y^2)^{1/2}dx \quad \rightarrow \quad \frac{ydy}{(1+y^2)^{1/2}} = \frac{xdx}{(1+x^2)^{1/2}} \quad \rightarrow \quad \int \frac{ydy}{(1+y^2)^{1/2}} = \int \frac{xdx}{(1+x^2)^{1/2}}$$

$$\int (1+y^2)^{-1/2}ydy = \int (1+x^2)^{-1/2}xdx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\int (1+y^2)^{-1/2}(2)ydy = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-1/2}(2)xdx$$

$$\frac{1}{2}\frac{(1+y^2)^{-1/2+1}}{-1/2+1} = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-1/2+1}}{-1/2+1} + c \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{(1+y^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$(1+y^2)^{1/2} = (1+x^2)^{1/2} + c$$

$$(1+y^2)^{1/2} = (1+x^2)^{1/2} + c$$

SOLUCION

EJEMPLO 4

Resolver la ecuación Diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

Alparecer no se puede hacer nada para separar las variables, pero intentemos

Empezamos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8} \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x(y+3)-(y+3)}{x(y-2)+4(y-2)} \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{(y+3)(x-1)}{(y-2)(x+4)}$$

$$\frac{dy}{(y+3)}=\frac{(x-1)dx}{(y-2)(x+4)} \quad\rightarrow\quad \frac{(y-2)dy}{(y+3)}=\frac{(x-1)dx}{(x+4)} \quad\rightarrow\quad \left(1-\frac{5}{y+3}\right)dy=\left(1-\frac{5}{x+4}\right)dx$$

$$\int\left(1-\frac{5}{y+3}\right)dy=\int\left(1-\frac{5}{x+4}\right)dx \quad\rightarrow\quad \int dy-5\int\frac{dy}{y+3}=\int dx-5\int\frac{dx}{x+4}$$

$$y-5\ln|y+3|=x-5\ln|x+4|+c$$

$$y-5\ln|y+3|=x-5\ln|x+4|+c$$

SOLUCION

EJEMPLO 5

Resolver la ecuación Diferencial $\sec^2 x dy + \csc y dx = 0$

Empezamos

$$\sec^2 x dy + \csc y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \sec^2 x dy = \csc y dx \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{\csc y} = \frac{dx}{\sec^2 x}$$

$$\frac{1}{\csc y} dy = \frac{1}{\sec^2 x} dx \quad \rightarrow \quad sen y dy = \cos^2 x dx$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta \quad si \quad \alpha = \beta \quad \cos(2\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - sen\alpha sen\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha \quad \rightarrow \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \quad \rightarrow \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \quad \rightarrow \quad 2\cos^2\alpha - 1 = \cos(2\alpha) \quad \rightarrow \quad 2\cos^2\alpha = \cos(2\alpha) + 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos(2\alpha)+1}{2} \quad \rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{\cos(2x)+1}{2}$$

$$sen y dy = \cos^2 x dx \quad \rightarrow \quad sen y dy = \frac{\cos(2x)+1}{2} dx \quad \rightarrow \quad \int sen y dy = \int \frac{\cos(2x)+1}{2} dx$$

$$\int sen y dy = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos(2x) dx\right) \quad \rightarrow \quad -\cos(y) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2} sen(2x)\right) + c$$

$$\cos(y) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2} sen(2x)\right) + c$$

$$\cos(y) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2} sen(2x)\right) + c$$

SOLUCION

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Resolver las siguiente ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = sen(5x)$

   Solución: $y = -\frac{1}{5}\cos(5x) + c$

2. Resolver las siguiente ecuación diferencial $dx + e^{3x}dy = 0$

   Solución: $y = \frac{1}{3}e^{-3x} + c$

3. Resolver las siguiente ecuación diferencial $x\frac{dy}{dx} = 4y$

   Solución: $y = cx^4$

4. Resolver las siguiente ecuación diferencial $y \ln x \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2$

   Solución: $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 = \frac{1}{2}y^2 + 2y + \ln y + c$

5. Resolver las siguiente ecuación diferencial $(e^y + 1)^2 e^{-y}dx + (e^x + 1)^3 e^{-x}dy = 0$

   Solución: $(e^x + 1)^{-2} + 2(e^y + 1)^{-1} = c$

6. Resolver las siguiente ecuación diferencial $\frac{dS}{dx} = kS$

   Solución: $S = ce^{kr}$

7. Resolver las siguiente ecuación diferencial

   $\sqrt{1-y^2}\,dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0, \quad y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   Solución: $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}x$